I. Définitions et Concepts

A- Notion de mesure

2 approches "erreur" ou "incertitudes"

"erreur" objectif : estimer une Valeur Vraie
Notion de cible dont on vise le centre

L'écart de nos mesures à cette valeur vraie → erreur

Un peu optimiste de penser qu'il y a une unique valeur vraie

↳ Incertitude définitionnelle

Même si on est un expérimentateur parfait, on ne pourra pas tendre vers une unique valeur.

⇒ "incertitude" Si on est parfait et qu'on reproduit une expérience plein de fois, on peut au mieux tendre vers l'incertitude définitionnelle

On veut décrire au mieux l'ensemble possible des solutions.

<u>Ex</u> : Température pièce, $g(z)$ varie avec z, ...

Approche erreur reste pertinente pour les constantes fondamentales ou quand incertitudes définitionnelles $\ll$ incertitudes expérimentales.

Aspect philosophique en vrai, on va pas trop se prendre la tête.

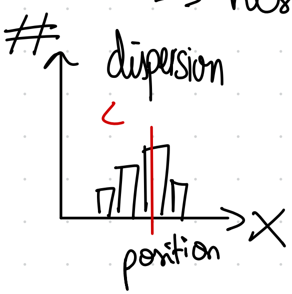
B- Valeur mesurée et incertitude-type

Résultat d'une mesure → <u>ensemble</u> de valeurs

Représentation du résultat

↳ tableau (difficile à interpréter)

↳ histogramme (plus visible mais difficile de faire des calculs)



↳ ⊕ condensée

position

- moyenne
  - géométrique
  - arithmétique
- Médiane
- la ⊕ fréquente
  le mode ?

dispersion

- écart-type
- écart à mi-hauteur
- étendue maximale
- écart interquartile

Choix les ⊕ simples mathématiquement pour traiter.

Valeur mesurée Meilleure estimation possible de la grandeur mesurée.

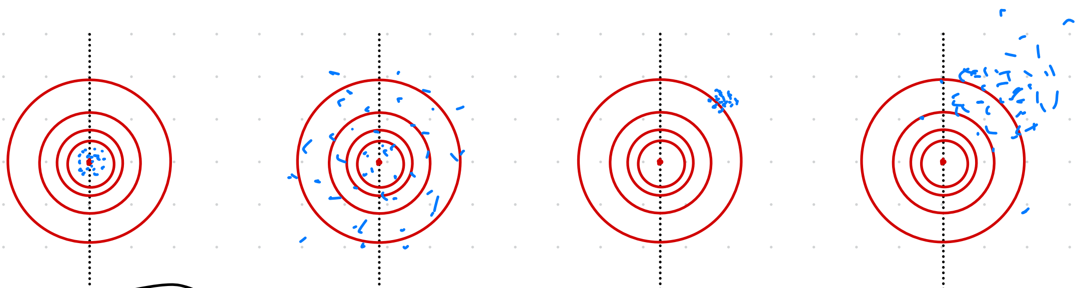
→ estimation de la position notée $\underline{x}$

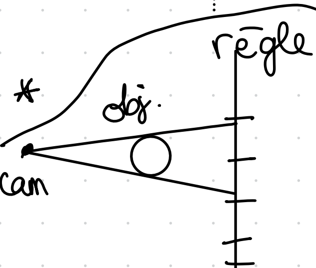
(moyenne arithmétique, espérance...)

Incertitude $\boxed{\text{type}}$ Estimation à l'aide d'un écart-$\boxed{\text{type}}$ de la dispersion des valeurs raisonnablement attribuables à la grandeur mesurée.

notée $u(x)$.

C- Erreurs aléatoires vs Systématiques





rapprocher objet et règle et/ou éloigner la caméra.

aléatoire
- humaine
- bruit inhérent à la mesure

systématique
- étalonnage
- référence
- oubli d'un effet physique

les 2
- parallaxe *

⚠ pas forcément un décalage

linéaire. Avec l'étalonnage c'est souvent un ×2, ×3, un effet multiplicatif.

II- Evaluation des incertitudes

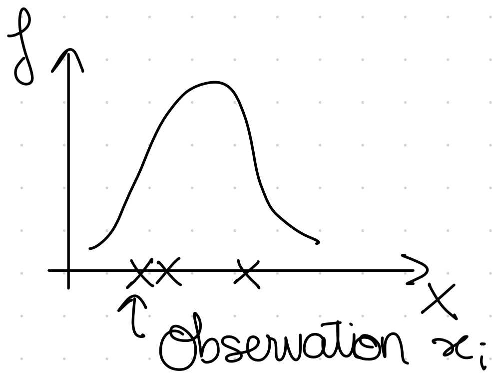
Type A : statistique, plein de mesures

Type B : tout le reste

A- Evaluation de type A = approche statistique

On fait $\underbrace{\text{N observations}}_{\text{1 mesure}}$ iid (indépendantes et identiquement distribuées)

hypothèse on a que des erreurs aléatoires.



On veut estimer au mieux la distribution à partir des observations.

→ On veut estimer

$$E(X) = \int f(x)\, x\, dx$$

$$\sigma^2 = E((X-E(X))^2)$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

par linéarité

⟹ estimateurs

- pour l'espérance → moyenne arithmétique

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

est-ce que ça marche ? → biais ? → $E(\bar{x}) = E(X)$?

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underbrace{E(x_i)}_{\substack{\text{iid donc} \\ E(X)}} = E(X)$$

$\Rightarrow$ pas de biais

- pour la variance ?

$$S_X^2 = \overline{(x-\bar{x})^2} \quad ?$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2$$

$$E(S_X^2) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \frac{1}{N} E\left(\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} \underbrace{E(x_i^2)}_{E(X^2)} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \underbrace{E(x_i x_j)}_{\substack{\text{si } i \neq j \quad E(X)^2 \\ \text{si } i = j \quad E(X^2)}}\right]$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{N^2}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{N} E(X^2)}_{N} + \underbrace{\sum_{i \neq j} E(X)^2}_{N^2 - N}\right]$$

$$= E(X^2)\left(1 - \frac{1}{N}\right) - E(X)^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

$$E(S_X^2) = \underbrace{\left(\frac{N-1}{N}\right)}_{\neq 1 \Rightarrow \text{BIAIS}} \sigma_X^2$$

Donc le "bon" estimateur sans biais de la variance c'est

$$\boxed{s_x^2 = \frac{N}{N-1}\,\overline{(x-\bar{x})^2}}$$

$$\boxed{s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}$$

pour retenir le $N-1$, se rappeler que si $N=1$, ça doit être indéterminée $\Rightarrow \frac{0}{0}$!

<u>Rq marrante</u> : Si on met la vraie $E(x)$ (par une opération du saint esprit), ça redevient $\frac{1}{N}$ au lieu de $\frac{1}{N-1}$. Le $N-1$ vient de la non-indépendance de x_i et $\bar{x}$ car $\bar{x}$ est calculée à partir des m̂ x_i !

<u>Remarque</u> Estimateur de l'écart-type

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

mais il a un biais

car $E(s_x) = E(\sqrt{s_x^2}) \neq \sqrt{E(s_x^2)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$

Mais on ne sait pas faire mieux donc on s'en contente et c'est pas grave car dans les calculs on prend la variance. A la toute fin, on prend la racine pour l'interprétation car m̂ dimension que notre grandeur mesurée.

Pour N observations :

$$\text{Valeur mesurée : } \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

⚠ Ce qu'on a avec s_x c'est l'écart-type d'une observation, pas d'une mesure

On veut plutôt l'écart-type de N observations dont on prend la moyenne

densité de proba

$$\rho(x) \neq \rho(\bar{x})$$

On veut $s_{\bar{x}} \neq s_x$.

$$\begin{cases} \sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \text{ si } X \text{ et } Y \text{ indépendants.} \\ \sigma_{aX}^2 = a^2 \sigma_X^2 \end{cases}$$

Rq à oublier !

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2_{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} \sigma_{x_i} = \frac{\sigma_X^2}{N}$$

donc $\sigma_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_X$ et $s_{\bar{x}} \simeq \frac{s_x}{\sqrt{N}}$

coefficient de student

en vrai $s_{\bar{x}} = \frac{t_N s_x}{\sqrt{N}}$ $\in [1, 1.84]$

Valeur mesurée : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

Incertitude type : $u(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$

B- Evaluation de type B - tout le reste

nécessaire quand : pas le temps
pas les moyens
graduation / numérisation qui cache la variabilité.

① Le travail a déjà été fait pour nous

↳ incertitude donnée dans la notice.

ex Multimètre MX579

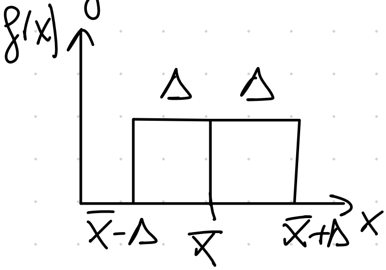
précision $\Delta = \underbrace{\overbrace{0{,}05\%}^{\text{étalonnage systématique}}}_{\text{0,05\% de la valeur lue}} + \overbrace{3\,\underbrace{UR}_{\text{unité de représentation}}}^{\text{aléatoire}}$

$UR = \frac{\text{calibre}}{\text{nb de points}} = \frac{200\text{ mV}}{20\,000} = 10\,\mu V$ ⇒ résolution
⇒ odg du dernier chiffre

$\Delta = 0{,}05\% \times 1{,}35\text{ mV} + 3 \times 0{,}01\text{ mV}$
$= 0{,}0307\text{ mV}$

Δ : estimation de la ⊕ grande erreur envisageable

Majorant de l'erreur.

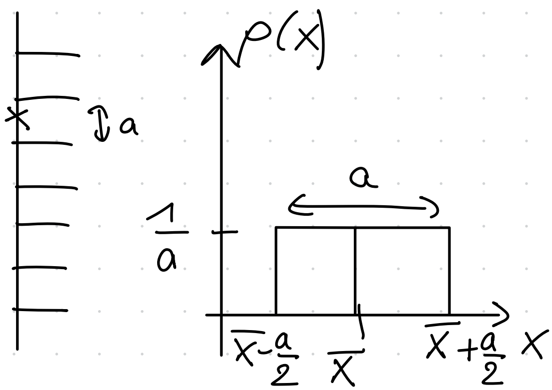


Pareil que la fin de (2), on pourrait prendre $\frac{\Delta}{\sqrt{3}}$ mais Δ c'est ok !

(2) A partir de notre observation

- "estimation" (au doigt mouillé)
- supposer une distribution

(par ex. sur une règle on suppose loi uniforme entre 2 graduations)



$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,(x-\bar{x})^2\,dx$$

$$\sigma^2 = \int_{\bar{x}-\frac{a}{2}}^{\bar{x}+\frac{a}{2}} \frac{1}{a}\,(x-\bar{x})^2\,dx$$

$u = x-\bar{x}$ $du = dx$

$$\sigma^2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a} u^2\,du = \frac{1}{a}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{a/2}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{a^3}{2^3 3} + \frac{a^3}{2^3 3}\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{a^2}{12}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{a/2}{\sqrt{3}} = u(x)}$$

On prend $\frac{a}{3}$ plutôt sur

toutes les mesures graduées.

En tout cas ne pas prendre a, c'est vraiment surestimé

Pareil quand on a des valeurs fluctuantes, on prend l'étendue divisée par un nombre entier entre 3 et 5.

On est pas du tout précis à 10% sur l'incertitude

↳ ⚠ peu de chiffres significatifs. (2 max)

0.9 ou 0.12

III- Propagation des incertitudes

Monte Carlo

$X \times Y$

$\bar{x} + u(x)$ $\quad$ $\bar{y} + u(y)$

N tirages (x_i, y_i)

Minimum 1 million de points

Analytique

* Pour une somme

$$Z = X + Y \longrightarrow \boxed{\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}}$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$ Si X et Y indépendant

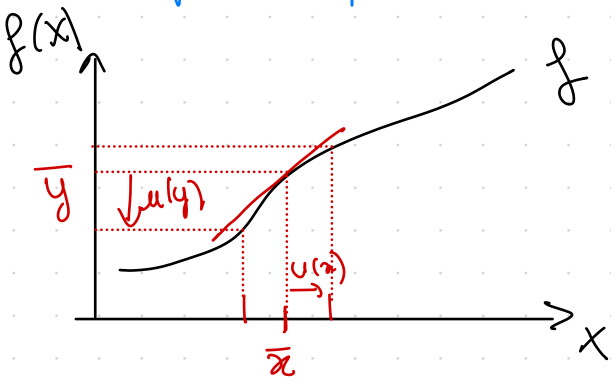
$$\boxed{u(z) = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}}$$ ← vient du fait qu'on travaille en écart-type alors que les maths se font sur la variance

gags si non indépendants

$X = Y$ ou $X = -Y$.

* Pour une fonction quelconque

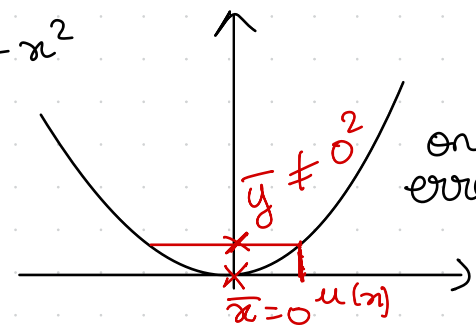
$Y = f(X)$



$\boxed{\bar{y} = f(\bar{x})}$ $\boxed{u(y) = |f'(x)|\, u(x)}$

⚠ quand on est pas linéaire

Par ex $y = x^2$



on a une erreur sur $\bar{y}$ si on utilise la formule

$\sigma_X^{\ 2} = E(X^2) - E(X)^2$

$u(x)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$

$\overline{x^2} \neq \bar{x}^2$

Vrai ssi $u(x) \ll \bar{x}$

$$\boxed{\left(\frac{u(x)}{\bar{x}}\right)^2 \ll 1}$$

Incertitude relative au carré

* Plus généralement $Z = f(X, Y)$

X et Y indépendants

$$\boxed{\begin{gathered}\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}) \\ u(z) = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}}\right)^2 u(x)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}}\right)^2 u(y)^2}\end{gathered}}$$

si $\left(\frac{u(x)}{\bar{x}}\right)^2 \ll 1$ et $\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 \ll 1$

* $Z = X^{\alpha} Y^{\beta}$

$$\ln(Z) = \alpha \ln X + \beta \ln Y$$

$$u(\ln(Z)) = \frac{u(Z)}{Z}$$

Donc $\frac{u(z)}{z} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$

IV- Exploitation des résultats

A- Présentation d'un résultat

Expliquer le protocole d'estimation des incertitudes

- si type A donner N, montrer le tableau, rappeler la formule
- si type B expliquer ce qu'on fait et donner les valeurs

- si incertitudes négligées → le dire
- si propagation, montrer Monte Carlo ou donner formule.

Écrire le résultat $x = \bar{x} \pm u(x)$

CS : 1 ou 2 pour $u(x)$

↳ m̂ nombre de chiffres après la virgule pour $\bar{x}$

raie du mercure

$$\bar{\lambda} = 584{,}04 \text{ nm} \quad u(\lambda) = 3{,}44 \text{ nm}$$

$$\lambda = (584{,}0 \pm 3{,}4) \text{ nm} \quad \text{ou} \quad \lambda = (584 \pm 3) \text{ nm}$$

B - Valeur de référence et z-score

$$\cancel{g = \left| \frac{\bar{x} - x_{ref}}{x_{ref}} \right|}$$

$\ll 1$?

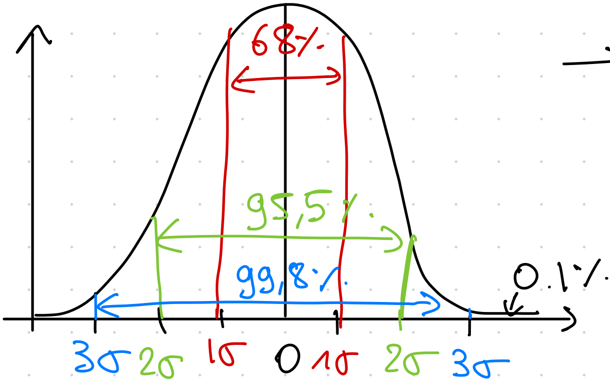
z-score ou écart normalisé ≠ écart relatif

↳ on met à la poubelle

question : erreur de l'ordre de grandeur de notre incertitude-type.

$$z = \frac{|\bar{x} - x_{ref}|}{u(x)} \quad \text{si } u(x_{ref}) = 0$$

$$\boxed{z = \frac{|\bar{x} - x_{ref}|}{\sqrt{u(x)^2 + u(x_{ref})^2}}} \quad \text{en général}$$



→ $z \leq 2$ mesure compatible avec la valeur de référence → modèle vérifié

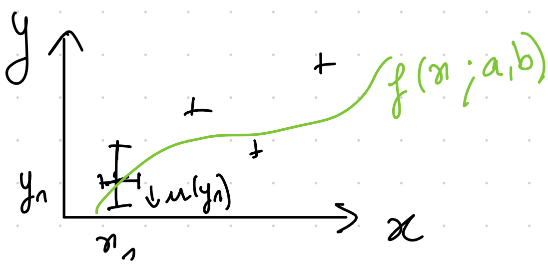
→ $z > 2$
↳ mesure incompatible
→ critiquer
- le protocole
- le modèle
- les estimations d'incertitude

V- Ajustements de fonctions

A- Méthode des moindres carrés

issu d'un modèle

On cherche a et b tel que $y = f(x; a, b)$ représente bien nos observations (x_i, y_i)



$u(x^2)$??

On veut minimiser $$\boxed{g(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[y_i - f(x_i; a,b)]^2}{u(y_i)^2}}$$

$u(x_i)$ pas prise en compte ! Rq: pourrait être fait avec la méthode des ellipses

Un peu une somme des z-score carrés.

Fait avec des algorithmes de descente de gradient.

⚠ aux paramètres initiaux.

$\hookrightarrow \bar{a}, u(a), \bar{b}, u(b), \min(g)$

B- χ^2_{red} et discussion des résultats

$$\min(g) = g(\bar{a}, \bar{b}) = \chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - y_{i\,fit})^2}{u(y_i)^2}$$

ajustement

extensif, dépend de n

On le normalise par $N - \underbrace{\text{nbre paramètres fit}}_{p}$

car par ex droite avec 2 points fit forcément.

$$\chi^2_{red} = \frac{\chi^2}{N-p}$$

dof : nbre degrés de liberté ajustement

On ne parle jamais du r^2.

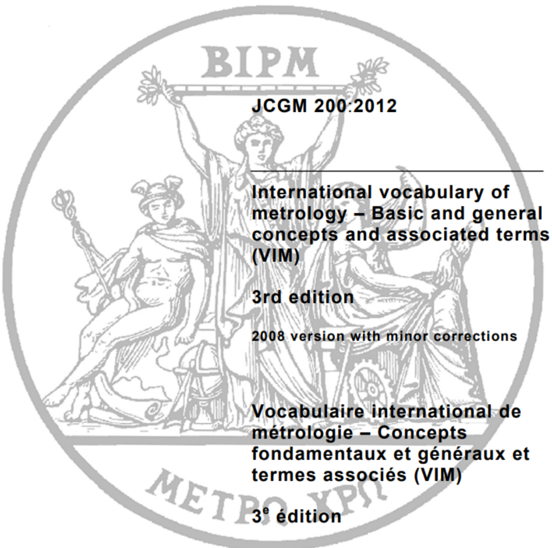
:) $\longrightarrow \chi^2_{red} \sim 1$

:($\begin{cases} \chi^2_{red} \geqslant 4 \\ \chi^2_{red} \ll 1 \end{cases}$

Une fois qu'on est sûr de nos incertitudes

$\chi^2_{red} \geqslant 4 \longrightarrow$ modèle non compatible

$\chi^2_{red} \ll 1 \longrightarrow$ notre mesure n'est pas assez précise pour contraindre le modèle, on ne peut pas vraiment conclure



JCGM 200:2012

International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)

3rd edition

2008 version with minor corrections

Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM)

3e édition

Version 2008 avec corrections mineures

2.1 (2.1)
mesurage, m
mesure, f

processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs **valeurs** que l'on peut raisonnablement attribuer à une **grandeur**

2.9 (3.1)
résultat de mesure, m
résultat d'un mesurage, m

ensemble de **valeurs** attribuées à un **mesurande**, complété par toute autre information pertinente disponible

NOTE 2 Le résultat de mesure est généralement exprimé par une **valeur mesurée** unique et une **incertitude de mesure**. Si l'on considère l'incertitude de mesure comme négligeable dans un certain but, le résultat de mesure peut être exprimé par une seule valeur mesurée. Dans de nombreux domaines, c'est la manière la plus usuelle d'exprimer un résultat de mesure.

2.3 (2.6)
mesurande, m

grandeur que l'on veut mesurer

2.11 (1.19)
valeur vraie, f
valeur vraie d'une grandeur, f

valeur d'une grandeur compatible avec la définition de la **grandeur**

NOTE 1 Dans l'approche «erreur» de description des **mesurages**, la valeur vraie est considérée comme unique et, en pratique, impossible à connaître. L'approche «incertitude» consiste à reconnaître que, par suite de la quantité intrinsèquement incomplète de détails dans la définition d'une grandeur, il n'y a pas une seule valeur vraie mais plutôt un ensemble de valeurs vraies compatibles avec la définition. Toutefois, cet ensemble de valeurs est, en principe et en pratique, impossible à connaître. D'autres approches évitent complètement le concept de valeur vraie et évaluent la validité des **résultats de mesure** à l'aide du concept de **compatibilité de mesure**.

NOTE 2 Dans le cas particulier des constantes fondamentales, on considère la grandeur comme ayant une seule valeur vraie.

NOTE 3 Lorsque l'**incertitude définitionnelle** associée au **mesurande** est considérée comme négligeable par rapport aux autres composantes de l'**incertitude de mesure**, on peut considérer que le mesurande a une valeur vraie par essence unique. C'est l'approche adoptée dans le GUM, où le mot «vraie» est considéré comme redondant.

2.16 (3.10)
erreur de mesure, f
erreur, f

différence entre la **valeur mesurée** d'une **grandeur** et une **valeur de référence**

NOTE 1 Le concept d'erreur peut être utilisé

a) lorsqu'il existe une valeur de référence unique à laquelle se rapporter, ce qui a lieu si on effectue un **étalonnage** au moyen d'un **étalon** dont la **valeur mesurée** a une **incertitude de mesure** négligeable ou si on prend une **valeur conventionnelle**, l'erreur étant alors connue,

b) si on suppose le **mesurande** représenté par une **valeur vraie** unique ou un ensemble de valeurs vraies d'étendue négligeable, l'erreur étant alors inconnue.

NOTE 2 Il convient de ne pas confondre l'erreur de mesure avec une erreur de production ou une erreur humaine.

2.17 (3.14)
erreur systématique, f

composante de l'**erreur de mesure** qui, dans des **mesurages** répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible

2.19 (3.13)
erreur aléatoire, f

composante de l'**erreur de mesure** qui, dans des **mesurages** répétés, varie de façon imprévisible

NOTE 1 La **valeur de référence** pour une erreur aléatoire est la moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages répétés du même **mesurande**.

2.26 (3.9)
incertitude de mesure, f
incertitude, f

paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des **valeurs** attribuées à un **mesurande**, à partir des informations utilisées

NOTE 1 L'incertitude de mesure comprend des composantes provenant d'effets systématiques, telles que les composantes associées aux **corrections** et aux valeurs assignées des **étalons**, ainsi que l'**incertitude définitionnelle**.

NOTE 2 Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type appelé **incertitude-type** (ou un de ses multiples) ou la demi-étendue d'un intervalle ayant une **probabilité de couverture** déterminée.

NOTE 3 L'incertitude de mesure comprend en général de nombreuses composantes. Certaines peuvent être évaluées par une **évaluation de type A de l'incertitude** à partir de la distribution statistique des valeurs provenant de séries de **mesurages** et peuvent être caractérisées par des écarts-types. Les autres composantes, qui peuvent être évaluées par une **évaluation de type B de l'incertitude**, peuvent aussi être caractérisées par des écarts-types, évalués à partir de fonctions de densité de probabilité fondées sur l'expérience ou d'autres informations.

NOTE 4 En général, pour des informations données, on sous-entend que l'incertitude de mesure est associée à une valeur déterminée attribuée au mesurande. Une modification de cette valeur entraîne une modification de l'incertitude associée.