

15- Propagation guidée des ondes

On 3

Manipulations possibles:

- Ondes acoustiques tuyau
- Cable coaxial
- Ondes centimétriques

Notes sur la manipulation:

- mesurer retard avec χ^2
et c
- Tuyau rectangulaire.

Niveau : 2^e année CPGE (PC)

prérequis : Equations de Maxwell dans le vide, OPPH, conditions aux limites sur un conducteur parfait, Equation de D'Alembert en acoustique, Réflexion totale en optique

Introduction : On a vu propagation libre avec D'Alembert. Pour source ponctuelle, sphérique amplitude en $\frac{1}{r}$, énergie en $\frac{1}{r^2}$. Sur des longues distances, cette dilution spatiale donne trop de pertes. Ex^{pe} qualitative entre deux piezos à l'oscillo. La solution : "guider" l'onde dans la bonne direction ! On observe amplitude plus élevée mais signal déformé. Aujourd'hui on va comprendre pourquoi. On va montrer que par les conditions aux limites, le confinement spatial d'une onde a trois conséquences : modes, fréq. coupure et introduit dispersion. On va d'abord développer ces idées théoriquement sur un guide d'onde ET puis on les vérifiera expérimentalement sur le guide acoustique qu'on vient de voir.

I - Guide d'onde électromagnétique plan

A) Position du problème et conditions aux limites

Sur slide schéma plans métalliques infiniment parfaits

conducteurs en $x=0$ et $x=a$ infinis en y et z .
Entre les plans : vide

On cherche les EN monochromatiques à ω qui peuvent se propager selon \vec{e}_z dans ce guide.

d'invariance selon \vec{e}_y avec des ondes selon \vec{e}_z donnent par Maxwell Faraday deux systèmes indépendants de solutions.

(solution la + générale $(E_x(x), E_y(x), E_z(x)) \exp(j\omega t - jkz)$
dans $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow E_y, B_x, B_z$ reliés
 E_x, E_z, B_y reliés

Dans un cas, $E_x = E_z = B_y = 0$ et on parle de TE
et dans l'autre $E_y = B_x = B_z = 0$ et on parle de TN.

La solution générale est une superposition des deux.
On choisit d'étudier TE; TN donnerait la même rel de dispersion.

Parois conducteurs parfaits $\Rightarrow \vec{E}_{\text{dans}} = \vec{0}$
l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \rightarrow 0$ si $\sigma \rightarrow +\infty$

donc par continuité des composantes tangentes

$$\vec{E}_{\text{tang}}(x=0) = \vec{E}_{\text{tang}}(x=a) = \vec{0}$$

Pour TE: $\vec{E}(x, y, z, t) = f(x) \exp(j(\omega t - kz))$

d'amplitude dépend de x , on a pas une onde plane.
On cherche k et $f(x)$.

B) Résolution : quantification des modes

Dans le vide \vec{E} vérifie D'Alembert

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

selon \vec{u}_y
$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}_{\alpha^2} f(x) = 0$$

Plusieurs cas:

$\alpha^2 < 0 \rightarrow$ solutions exponentielles réelles

pour avoir $f(0) = f(a) = 0 \Rightarrow f = 0$ X

$\alpha^2 = 0 \rightarrow$ solutions affines $\rightarrow f = 0$ X

Donc $\alpha^2 > 0$ et $f(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$

$$f(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$f(a) = 0 \Rightarrow B \sin(\alpha a) = 0 \Rightarrow \sin(\alpha a) = 0$$

$$\text{soit } \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Rq: même quantification que la corde de Helmholtz! Ce sont les conditions aux limites qui imposent cette discrétisation. m étiquette de mode.

Pour n fixe $\vec{E}_m(x, z, t) = E_0^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)}$

f_1, f_2 et f_3 sur slide.

champ stationnaire en x et progressive en z !

1) Relation de dispersion et fréquences de coupure

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c,m}^2}{c^2}$$

avec $\omega_{c,m} = \frac{m c \pi}{a}$ soit $f_{c,m} = \frac{m c}{2 a}$

C'est la relation de Klein Gordon, la même que l'on trouve pour la propagation d'une EN dans un plasma.

3 Régimes:

- $\omega > \omega_{c,m}$, $k \in \mathbb{R} \rightarrow$ propagation
- $\omega = \omega_{c,m}$, $k = 0$ onde stationnaire en x
- $\omega < \omega_{c,m}$, $k \in i\mathbb{R}$
 \rightarrow onde évanescente en z
pas de propagation d'énergie.

Code python par exemple d'Alex.

R_g: Avec NF $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ on a

$$\vec{B}_m \propto \frac{k_z}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{u}_y + \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{u}_z$$

donc $\vec{B}_z \neq 0$ et on est pas TN.

On peut d'ailleurs montrer que dans un guide creux, il est impossible d'avoir TEN. En revanche dans un câble coaxial avec deux conducteurs concentriques, on a TEN non dispersif à $c \neq \omega$. \Rightarrow on utilise ceux pour basse freq. Pour HF ($> 1\text{MHz}$), pertes par effet de peau trop importantes \rightarrow on passe à des guides creux.

D) Vitesses de phase et de groupe

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,m}}{\omega}\right)^2}} > c \text{ superlumérique}$$

Mais ne viole pas la relativité: v_φ est une vitesse purement cinématique vitesse de déplacement des surfaces d'égal phase, pas de transport d'énergie ou d'information.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \text{ on différencie } \omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{c,m}^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}dw = 2c^2 k dk$$

$$v_g = \frac{c^2 k}{\omega} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,m}}{\omega}\right)^2} < c \quad \checkmark$$

v_g vitesse de l'enveloppe du paquet d'ondes \rightarrow information. On peut montrer avec Poynting que aussi Énergie. On a $v_g \times v_p = c^2$ avec KG.

v_g dépend de $\omega \rightarrow$ dispersif! Ce n'est pas le vide qui est dispersif mais bien le confinement qui introduit dispersion.

En plus, pour ω donnée $> \omega_{c,m} \quad m > 2$, on a plusieurs modes qui coexistent à des vitesses différentes \rightarrow dispersion intermodale.

tr: on l'a démontré pour des GN mais il suffit de D'Alembert et des CL pour avoir les phénomènes.

II - Universalité du guidage : ondes acoustiques

A) \vec{v}_1 en équation et modes acoustiques

En acoustique linéaire la surpression p_1 vérifie D'Alembert $\Delta p_1 = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

avec $c_s = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \sim 343 \text{ m/s}$ à 20° C . \vec{v}_1 que pour en mais scalaire.

On peut ensuite déduire \vec{v}_1 par Euler

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \vec{\nabla} p_1.$$

Conditions aux limites $\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p_1}{\partial n} \Big|_{\text{paroi}} = 0$

Condition de Neumann au lieu de Dirichlet
 → le mode 0 va exister!

Pour un guide rectangulaire $a \times b$

$$\text{on trouve } p_1(m, y, z, t) = p_0^{(m,m)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp(j\omega t - kz)$$

(is instead of sin ca Neumann)

$$\text{et } k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

Soit les fréquences de coupure $f_c^{(m,m)} = \frac{c_s}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$

et $v_g^{(m,m)} = c_s \sqrt{1 - \left(\frac{f_c^{(m,m)}}{f}\right)^2}$

Différence fonda avec E_n , le mode (0,0) existe!
 On peut avoir $p_1 = p_0$ = cste et vérifier Neumann.

Mode sans fréquence de coupure et non dispersif $v_g = c_s \forall \omega$.

Vérifions tout ça expérimentalement:

B) Expérience guide d'ondes acoustiques

Tube carré $a=b=17,9 \text{ mm}$, $c_s = 343 \text{ m/s}$, $L \sim 50 \text{ cm}$

dégénérescence mode	$f_c^{(m,m)}$ (kHz)	$v_g^{(m,m)}$ (m/s)	Δt (s)
(0,0)	0	343 m/s	1,46 ms
(0,1)	$\sim 10 \text{ kHz}$	332 m/s	1,51 ms
(1,0)	$\sim 10 \text{ kHz}$	332 m/s	1,51 ms
(1,1)	$\sim 14 \text{ kHz}$	321 m/s	1,56 ms
(2,0)	$\sim 20 \text{ kHz}$	298 m/s	1,68 ms

Recalculer et mettre sur slides avec incertitudes.

En préparation retard et c estimés par λ^2_{red} .

L et a mesurés avec incertitudes.
Bande de 5 à 7 trains d'onde.

On voit la dispersion intermodale. On vérifie Z_{score}
 $\sqrt{g(1,0)}$.

On a vérifié expérimentalement les concepts de modes, de f_c et de dispersion qu'on a développés pour les FN s'appliquent aussi à l'acoustique. Ce sont des conséquences universelles du confinement, maintenant on va voir pourquoi ces phénomènes comptent en pratique : quelles sont leurs conséquences sur le transport de l'information?
* amplitude constante + filtrage

III - Conséquences sur le transport de l'information

*

A) La dispersion modale limite le débit

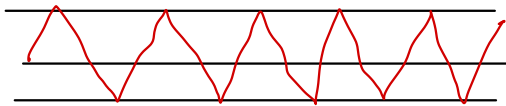
Prends un guide de longueur l . Le mode le plus fondamental arrive en un temps T_{min} et le mode le plus lent en T_{max} . Δt c'est le retard temporel ΔT représente l'étalement du signal en sortie.

Si on envoie des bits espacés de T , il faut $T > \Delta T$ pour ne pas qu'ils se mélangent

→ limitation du débit

à saut d'indice

en fibre optique on fera les calculs en TD



→ mode fonda

$$T_{min} = \frac{n_1 l}{c}$$

mode le plus incliné

$$\tau_{\max} = \frac{m_1^2 l}{m_2 c}$$

$$\Delta t = \frac{m_1 l}{c} \frac{m_1 - m_2}{m_2}$$

A.N. $m_1 = 1,52$; $m_2 = 1,51$, $l = 1 \text{ km} \rightarrow \Delta t \sim 34 \text{ ns}$

donc débit max $\frac{1}{\Delta t} \sim 30 \text{ nbits/s}$

dangereusement insuffisant pour les télécommunications modernes.

B) Solution: le régime monomode

On ne veut pas de dispersion intermodale \rightarrow 1 seul mode.
2 exemples.

, le câble coaxial

Mode TEM \vec{E} et \vec{B} tous deux transverses $w = ck$
Sans dispersion.

, la fibre optique

cœur suffisamment petit ! Pour $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$
(minimum d'absorption de la silice) et $\Delta n = 0,01$,
on trouve rayon cœur $< 3,5 \mu\text{m}$.

On arrive à des débits de l'ordre de 10 Gbits/s
Et en multiplexant 100 λ différents dans la même fibre
on dépasse le Tbit/s.

Rq: \hat{n} en monomode toujours de la dispersion intramodale

Conclusion Pour résumer, le guidage d'une onde quelle que soit sa nature résulte du confinement par des conditions aux limites. 3 conséquences en plus

de propagation émerge efficacement :

- quantification des modes
- fréquences de coupure
- dispersion

Le guidage est un phénomène universel qu'on retrouve dans plein d'autres domaines comme en acoustique océanique, en sismologie ou en mécanique quantique.

(fil quantique plutôt que puit 1D)

Bibliographie : Dunod PC H-Heipa Onda

Bul 742 (1992) Taillet Optique Physique

Poly Agreg Lyon Propagation des ondes.

Checklist : Nanip, pythion x2 (manip + Alexandre)
soliton, Klein Gordon, sismologie, ...

↓
particule relativiste

Le guide d'onde donne une masse
au photon