

14- Ondes acoustiques (On 2)

Manipulations possibles : Mesure célérité son
Effet Doppler

Noter sur la manip : Se mettre en mode XY.

Niveau : PC

prérequis : .OPPH .Mécanique des fluides .Thermo.
méca solide (S, σ , ϵ , ...)

Introduction quand je parle, ma voix vous parvient à travers l'air de la pièce. Nos cordes vocales mettent en vibration l'air environnant, créant des variations de pression qui se propagent de proche en proche - ce sont les ondes acoustiques. Vous entendrez aussi les ondes acoustiques des basses de vos voisins donc à travers les murs. On a là 2 situations ψ très différentes. Dans un fluide, c'est le couplage entre variations de pression et mouvement des particules de fluide qui porte l'onde. Dans un solide ce sera plutôt le couplage contrainte élastique et déformation. Néanmoins, on va voir que dans les deux cas, la propagation est décrite par la même équation de D'Alembert que vous connaissez déjà (onde, ...) et que des grandeurs analogues comme l'impédance permettent une description unifiée. On va commencer par étudier les ondes dans les fluides comme l'air ou l'eau.

I- Propagation acoustique dans les fluides

A) Hypothèses, linéarisation et équations couplées

* on néglige la pesanteur.

On considère un fluide parfait (sans viscosité) au repos dans le référentiel d'étude. * En l'absence d'onde, le fluide est caractérisé par :

- une pression uniforme p_0

- une masse volumique uniforme μ_0
- une vitesse nulle $\vec{v} = \vec{0}$.

Rq. Dans Euler $\text{grad } p_0 = \mu_0 \vec{g}$ s'élimine. Il reste

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1 + \mu_1 \vec{g}$$

$$\text{On regarde } \frac{|\text{grad } p_1|}{\mu_1 |\vec{g}|} \sim \frac{p_1 / \lambda}{\mu_1 g} \sim \frac{c^2}{\lambda g} \gg 1$$

On veut donc $\lambda \ll \frac{c^2}{g} = H_{\text{can}}$ soit $f \gg \frac{g}{c}$.

Eq audible $\in [20; 2 \cdot 10^4] \text{ Hz}$

$\frac{g}{c} |_{\text{air}} = 0,03 \text{ Hz}$

$\frac{g}{c} |_{\text{eau}} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} \checkmark$

L'onde acoustique est une petite perturbation de cet état d'équilibre. On écrit

$$\begin{aligned} p(n,t) &= p_0 + p_1(n,t) & |p_1| \ll p_0 \\ \mu(n,t) &= \mu_0 + \mu_1(n,t) & |\mu_1| \ll \mu_0 \\ \vec{v}(n,t) &= \vec{0} + \vec{v}_1(n,t) \end{aligned}$$

à quoi on compare cette vitesse particulière? On va la comparer à c qu'on va introduire après.

$$\|\vec{v}_1\| \ll c$$

p_1 : surpression. C'est l'approximation acoustique. On va alors partir des équations de la méca flué et on va les linéariser à l'ordre 1.

$$\underline{\text{Masse}} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \text{div}(\underbrace{(\mu_0 + \mu_1)}_{\text{ordre 2}} \vec{v}_1) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0$$

moment du fluide
 \hookrightarrow variations
 $\mu \rightarrow$ var de p
 compression latérale

Euler: $\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} \right) = - \operatorname{grad} p$

$$\hookrightarrow \underbrace{(\mu_0 + \mu_1)}_{\text{ordre 2}} \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}_1 \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}_1}_{\text{ordre 2}} \right) = - \operatorname{grad} p_1$$

$$\hookrightarrow \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \operatorname{grad} p_1 = 0 \quad \text{PFD pour fluide} \\ \operatorname{grad} p \text{ accélère}$$

2 équations qui couplent v_1 et p_1 avec 3 inconnues.

Pour la dernière, on a besoin de faire une hypothèse qui s'en vérifiera à la fin: transformation isentropique (pas de phénomènes dissipatifs).

Si isentropique, on peut écrire $\mu(p)$ seulement. Par développement limité

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 = \mu_0 + \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_S p_1 + o(p_1^2)$$

$$\text{donc } \mu_1 = \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_S p_1 = \chi_S \mu_0 p_1$$

avec $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_S$ le coef de compressibilité isentropique

Par ex pour l'eau $\chi_S = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ (très peu compressible!)

On arrive alors aux deux équations couplées pour p_1 et v_1 :

$$\begin{aligned} (1) \quad \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} &= -\operatorname{div} \vec{v}_1 && \text{couplage vitesse /} \\ &&& \text{pression à} \\ (2) \quad \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= -\vec{\operatorname{grad}} p_1 && \text{l'origine propa} \end{aligned}$$

B) D'Alembert, célérité

Pour découpler ces deux équations, on peut par ex

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \quad (1) \\ \hookrightarrow \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu_0} \Delta p_1 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta p_1 = 0 \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \mu_0}}$$

C'est l'éq. de D'Alembert. On peut trouver la même pour v_1 en prenant $\frac{\partial}{\partial t}$ de (2) et mg écoulement irrotationnel.

$$\text{(Rq: rot(2) mg } \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{v}_1) = \vec{0} \text{ car } \operatorname{rot}(\operatorname{grad}) = \vec{0} \text{.)}$$

On a donc une onde acoustique qui se propage à la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \mu_0}}$

Pour l'eau avec $\chi_s = 4,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}^{-1}$ et $\mu_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$

on trouve $c_{\text{eau}} \sim 1500 \text{ m/s}$

Pour l'air? Hypothèse gaz parfait + isentropique

$$\hookrightarrow \text{Laplace } \frac{P}{\mu^\gamma} = \text{cte}$$

$$\text{soit } P_0 \mu^\gamma = \mu_0 P$$

$$\gamma P_0 d\mu \mu^{\gamma-1} = \mu_0 dP$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP} = \frac{1}{\gamma P_0} = \gamma_s !$$

$$\text{Donc } c_{\text{air}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}} \quad \text{et } P_0 = \frac{\mu_0 R T_0}{n}$$

donne

$$c_{\text{air}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

à 20°C \rightarrow 343 m/s
plus lent que liquide!

Dépend que de T et du gaz! Pas de P ou f
 \rightarrow milieu non-dissipatif.

2 Rqs: • Si isotherme au lieu de isentropique, on trouve
 $c_{\text{air}} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}} \sim 290 \text{ m/s}$ en désaccord avec expé
• du l'ordre de la vitesse quadratique moyenne
 $\sqrt{\frac{3RT_0}{M}} \rightarrow$ collisions!

Vérif expé avec Z score.

C) Retour sur les hypothèses

$$(1) \frac{d\mu}{\mu} \sim \frac{dP}{P} \rightarrow \mu_1 \sim \gamma P_0 \frac{v_1}{c} \quad \text{et} \quad \frac{\mu_1}{P_0} \sim \gamma \frac{v_1}{c}$$

$$\frac{p_1}{p_0} \sim \gamma Na$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} \sim \frac{p_1}{p_0 \gamma}$$

donc $\frac{\mu_1}{\mu_0} \sim Na$

$\vec{v} \sim c$
 \rightarrow ondes de choc!

et $\frac{v_1}{c} \sim Na$

Tout dépend du Mach!

Pour une conversation "normale"

$p_1 \sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$ (seuil audition $2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$)

$\rightarrow Na \sim 10^{-7} \checkmark$

Reste à vérifier isentropique: 2 temps

$$T_{propa} = \frac{1}{f}$$

$$T_{diff} = \frac{\lambda^2}{2D} = \frac{c^2}{D \gamma^2}$$

$$\frac{T_{propa}}{T_{diff}} = \frac{f D \lambda}{c^2} \leq 4 \cdot 10^{-6}$$

340 ou 1500

donc très petit! \checkmark

on peut mettre gravité ici

Ok pour dans les fluides mais pas seulement!
 Isolation acoustique des murs \rightarrow solides.

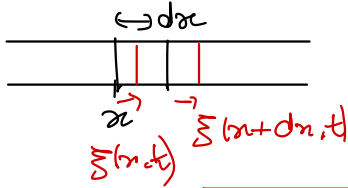
II- Propagation dans les solides

A) Mise en équations

Plus vraiment de forces de pression \rightarrow forces élastiques.

Tableau sur slide	\vec{v}_n	Σ	cinématique
	p_n	σ	dynamique

On considère barre homogène solide élastique
 on note $\Sigma(x, t)$ le déplacement longitudinal



→ déformation

La loi de Hooke donne

$$\sigma = E \epsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

↳ module d'Young Pa

$$+ PFD : \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = S [\sigma(x+dx, t) - \sigma(x, t)] = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$$

$$\hookrightarrow \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{on retrouve D'Alembert pour } \xi \text{ et } \sigma$$

avec

$$c_{\text{solide}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Même structure mathématique pour des phénomènes absolument différents !

B) Comparaison fluides / solides

Tableau célérités	Air	343 m/s	compressibilité
	Eau	1500 m/s	"
	Plomb	1230	élasticité (E faible, ρ élevée)
	Acier	5100	élas (E élevée)
	Granit	6000	élasticité

$c_{\text{solide}} > c_{\text{liquide}} > c_{\text{gaz}}$ logique collisions!

Pb exception parmi solides avec E faible et ρ élevé.

Structure commune $c^2 = \frac{\text{rigidité}}{\text{inertie}} + \text{d'Alembert}$

La différence principale entre les 2 va être les modes de propagation. ≠ comme on voit la voir

En effet, les ondes sonores dans les fluides, à l'exception des fluides stratifiés ne transmettent que des ondes longitudinales* car ils n'ont pas de rigidité de cisaillement. Dans les solides (en 3D) on peut avoir des ondes transverses de célérité $c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ tjs $< c_L$ avec G le module de cisaillement transverse. Application étonnante en Sismologie ondes P longitudinales et S transverses. Les ondes S ne traversent pas le noyau terrestre ce qui nous apprend qu'il est liquide. Dans la suite, qu des ondes longitudinales.

On a obtenu l'équation de D'Alembert dans les deux cas, on a vu qu'une base des solutions de cette équation c'était les OPPH qu'on va étudier un peu plus.

III - Ondes planes progressives : énergie et impédance

A) Structure de l'OPPH acoustique

On repart des fluides mais les mêmes calculs dans les solides.

Considérons une OPPH de pulsation ω se propageant selon \vec{u}_x en notation complexe.

$$\underline{p}_1(x, t) = \underline{P} \exp(j(\omega t - kx))$$

avec la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$.

Avec Euler linéarisé $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1$, on obtient

$$j \rho_0 \omega \underline{\vec{v}}_1 = \underline{P} \times jk \vec{u}_x$$

$$\text{Soit } \underline{\vec{v}}_1 = \frac{P}{\rho_0 c} \vec{u}_x$$

On retrouve que $\vec{v} \parallel \vec{u}_x$ la direction de propagation \rightarrow onde longitudinale.

Avec Hooké et E \rightarrow on trouve pareil dans les solides.

B) Aspects énergétiques

Puissance à travers une surface

$$P = \iint (p_0 + p_1) \vec{v}_1 \cdot d\vec{S} \quad \begin{matrix} \text{Pds} \\ \text{(force} \times \text{vitesse)} \end{matrix}$$

On définit un vecteur de Poynting acoustique (vecteur densité de courant d'énergie):

$$\vec{\Pi} = (p_0 + p_1) \vec{v}_1$$

$\langle p_0 \vec{v}_1 \rangle = 0$ pour OPPH mais pas $\langle p_1 \vec{v}_1 \rangle$ car porte le transfert net d'énergie quadratique analogue de $\vec{E} \times \vec{B}$ en EM.

Pour les solides $\vec{\Pi} = \ominus \sigma \sum \vec{u}_x$

pression positive en compression
 σ positive en tension

$\langle p_1 \vec{v}_1 \rangle = I$ intensité acoustique

Pour OPPH $I = \frac{I_{\text{eff}}^2}{\rho c}$ l'oreille humaine a une dynamique considérable

seuil d'audibilité $\xrightarrow{I \times 10^{12}}$ seuil de douleur.
et sensation à peu près logarithmique

$$\hookrightarrow I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \quad \text{seuil audible}$$

quelques dB

pièce calme ~ 30 dB
conversation ~ 60 dB
concert ~ 110 dB
seuil douleur ~ 120 dB

Cherchons maintenant une densité d'énergie volumique qui vérifie le bilan local de conservation habituel:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{w} = 0$$

Pour les fluides on trouve

$$e = e_c + e_p = \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{\rho_0 c^2}$$

e_p travail des forces de pression

Pour une OPPH, $p_1 = \rho_0 c v_1 \rightarrow e_c = e_p$

équipartition comme $e_E = e_B$

Dans un solide $e_c = \frac{1}{2} \rho \dot{\xi}^2$ $e_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)^2$

On va introduire une dernière grandeur pour les OPPH car on a vu que p_1 et v_1 étaient prop:

Impédance acoustique

$p_1 = \rho_0 c v_1$ par analogie $Z = \frac{V}{I}$ relie "force" et "flux", on définit $Z_c = \frac{p_1}{v_1} = \rho_0 c$ pour OPPH ou

$$Z_c = \frac{\sigma}{\dot{\xi}} = \rho c s$$

△ seulement pour UNE OPPH.

Si dans l'autre sens, devient $-Z_c$. Si superposition, on ne sait plus si simplement!

Pour une OPPH : $Z_c \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{v}_1$ et p_1 en phase
 Z_c ne dépend que du milieu, pas de f

ODG $Z_{\text{air}} \sim 410 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

$Z_{\text{eau}} \sim 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

$Z_{\text{acier}} \sim 4 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

$Z_{\text{solide}} > Z_{\text{liq}} \gg Z_{\text{gaz}}$

mesure la résistance du milieu à être mis en mouvement par une onde de pression.

A quoi ça sert ? À comprendre ce qu'il se passe à l'interface entre 2 milieux réflexion, transmission? \rightarrow gd d'échographie

Conclusion

Récap. Ça on s'est concentrés sur acoustique linéaire mais 2 trucs qui ajoutent non-linéarité:

- $v \ll c \rightarrow$ Ondes de choc
- Viscosité qui introduit atténuation dépendante de la fréquence \rightarrow Sismologie.

Bibliographie

BUP
 Durand PC
 H. J. P. ondes
 Tec & Doc PSI

Ellipse Ondes mécaniques et diffusion