13 - Ondes Progressives, ondes stationnaires

On 1

Manipulations possibles :

- Vitesse du son dans l'air quanti
- Corde de Melde quali
- "Flûtes" et spectro ? quali

Niveau : PC

prérequis : Signaux et ondes PCSI Vitesses de φ vs groupe
Mécanique du point
mécanique des fluides (masse + Euler)
Séries de Fourier

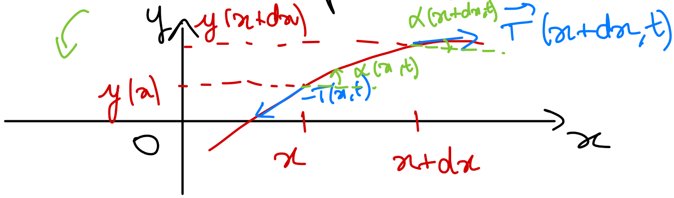
Introduction Ondes omniprésentes en φ et dans la vie. Quand je vous parle un signal sonore se propage de ma bouche jusqu'à vos oreilles : c'est une perturbation de la pression de l'air qui se déplace sans transport de matière. Le son met un certain temps pour arriver, il y a une vitesse de propa (ex des éclairs $c_{lum} > c_{son}$). C'est un exemple d'ondes prog. Maintenant, regardez cette corde de Melde qu'on va décrire plus ensuite, on voit des oscillations, une onde mais rien ne se propage. C'est un phénomène appelé une onde stationnaire.
Comment ces deux comportements - propagation vs oscillations sur place - peuvent-ils émerger de la même φ? C'est la question de cette leçon et pour y répondre on va commencer par établir l'équation qui gouverne les deux ondes dont on vient de parler et bien d'autres encores, l'équation de D'Alembert.

I - Equation de D'Alembert

A) La corde vibrante : modèle et hypothèses

On considère une corde tendue le long de l'axe Ox par une tension de norme T_0.

On s'intéresse à ces petits mouvements dans le plan Oxy.



(plus gros le joue ϳ)

Hypothèses : H_1 : petits mouvements transverses $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$
donc $|\alpha| \ll 1$

Conséquence $\sin\alpha \sim \tan\alpha \sim \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ et $\cos\alpha \sim 1$
→ linéaire
et $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \sim dx$!

Un point de la corde repéré par l'abcisse x au repos reste à la même abscisse pendant le mouvement

H_2 : Corde sans raideur : pas de résistance à la flexion + inextensible

(Rq si raideur, force non tangente, terme en $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, dispersif, Euler-Bernoulli).

H_3 : On néglige le poids et toute autre force que T.

B) Etablissement de l'équation d'onde

PFD à un élément de corde de masse $dm = \mu dx$ entre x et x+dx
masse linéique

$$\mu \cancel{dx}\, \vec{a} = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x,t) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \cancel{dx}$$

Sur $\vec{e}_x$ $a_x \sim 0$ donc $\frac{\partial}{\partial x}(T\cos\alpha) = 0$ et $\cos\alpha = 1$
donc $T = \text{cste} = T_0$

tension constante tout le long de la corde !

Sur $\vec{e}_y$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(T_0 \sin\alpha) = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Soit $$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } c = \frac{T_0}{\mu}}$$

C'est l'équation de D'Alembert unidimensionnelle. c est la célérité de l'onde comme on va le voir plus en détails juste après. Ici, elle augmente avec la tension qui est la grandeur de rappel (vers position d'équilibre) et diminue avec μ qui est la grandeur d'inertie qui s'oppose à la mise en mouvement.

Sur cette équation on peut dire deux choses importantes
→ linéaire : principe de superposition s'applique
→ identique par retournement du temps
absence de dissipation

Cette équation et la structure couplage rappel inertie n'est pas spécifique à la corde vibrante.

C) Universalité de l'équation de D'Alembert

On la retrouve par exemple pour les ondes acoustiques dans l'air. On peut montrer qu'en combinant l'équation d'Euler et la conservation de la masse dans l'approximation acoustique (ie petites perturbations), la surpression p_1 et la vitesse locale de l'air v_1 vérifie toutes les deux une équation de d'Alembert avec pour célérité $c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$.

On peut comparer quatre systèmes physiques fonda (sur slide)

Syst.	grandeurs	Rappel	inertie	c
Corde	y, T_y	T_0	μ	$\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$
Son	p_1, v_1	γP_0	ρ_0	$\sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$
Cable coaxial	u, i	C	L	$1/\sqrt{LC}$
E.M.	$\vec{E}$, $\vec{B}$	$\frac{1}{\varepsilon_0}$	μ_0	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

A chaque fois on a deux grandeurs couplées et c'est leur couplage qui entraine l'apparition d'une onde. Dans la suite on va raisonner sur la corde vibrante et on fera une application expé en acoustique mais les résultats se transposent à tous les systèmes aboutissant à une eq. de D'Alembert.

Quelles sont les solutions de cette équation ? On a parlé en intro d'ondes progressives, montrons que d'Alembert contient bien ce type de solution et caractérisons-le.

II – Ondes progressives

A) Solution générale

On peut remarquer que ce qu'on appelle l'opérateur de D'Alembert peut se factoriser sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)y=0$$

En posant $p=t-\frac{x}{c}$ et $q=t+\frac{x}{c}$ on trouve alors

$$\frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q}=0 \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial q}=G(q) \quad \text{indépendant de } p$$

et on réintègre $y=g(q)+f(p)$

soit $$\boxed{y(x,t)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)+g\left(t+\frac{x}{c}\right)}$$

qui est bien la célérité.

avec f et g deux fonctions quelconques deux fois dérivables.

Ça veut dire quoi $f\left(t-\frac{x}{c}\right)$? Prenons un point x à t, il est dans l'état $f\left(t-\frac{x}{c}\right)$. Au point $x+\Delta x$, on a le même état si $f\left(t'-\frac{x}{c}-\frac{\Delta x}{c}\right)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)$

ie $t' = t + \frac{\Delta x}{c}$ ou $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$. On a un déplacement du profil sans déformation vers les $x \nearrow$ à c. Onde progressive vers la droite. Par le même raisonnement, $g(t + \frac{x}{c})$ se propage à c vers les $x \searrow$.

La solution générale de D'Alembert est donc la superposition de deux ondes progressives contra propageantes. Et toute solution de D'Alembert est une combinaison d'ondes progressives.

Etudions des ondes progressives particulières et fondamentales

B) Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

En φ, souvent signaux périodiques (son, signal électrique, ...) or, Fourier $\rightarrow$ somme de sinusoïdes. Les briques élémentaires de cette décomposition sont donc les ondes progressives sinusoïdales et en 1D, on va parler d'OPPH :

plane = fronts d'onde plans. y ne dépend que de x.

$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$ où ω est la pulsation temporelle et k la pulsation spatiale qu'on appelle nombre d'onde. Ces

On a $\omega = 2\pi f$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Ces deux périodicités spatiales et temporelles ne sont pas indépendantes.

En effet,

Si on injecte notre OPPH dans D'Alembert, on a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y$$

soit $$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

soit $$\boxed{k = \pm \frac{\omega}{c}}.$$

signe donne sens propa, on garde + sans perte de généralité

ou encore $$\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}.$$

Regardons pour ces OPPH les vitesses de phase et de groupe

On a $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ indépendante de ω. C'est cohérent, D'Alembert est l'équation des ondes dans un milieu non-dispersif.

Et $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c = v_\varphi$. c est bien la célérité de l'onde.

Vérifions cela expérimentalement pour les ondes sonores.

c) Mesure de la célérité du son dans l'air

On a dit que pour acoustique, on trouve D'Alembert avec $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$. Si on considère l'air comme un gaz parfait cela nous donne

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$ avec $\gamma = 1,4$, $R = 8,314$, $M = 29$ g/mol et $T_0 = ?$ K.

soit $c = 343$ m/s

Plein de méthodes pour vérifier ça mais on va ici utiliser la double périodicité des OPPH pour le faire de la manière la plus précise possible.

→ Expliquer la manip, on fait un χ^2_{red} sur plusieurs distances et on utilise la méthode du déphasage pour calculer λ. Connaissant f, on remonte à c.

On a $d_n = n\lambda$ donc régression linéaire donne λ avec incertitude.

Incertitude sur T donne $u(c_{théo})$ et aussi peut être incertitude sur f ?

Faire un Zscore.

Notons que la Vitesse qu'on a mesuré ainsi est v_φ. Ici $v_\varphi = v_g = c_s$. Aussi possible v_g par temps de parcours.

On a vérifié la propagation des ondes progressives et mesurer leur célérité. Mais en intro, on a vu tout autre comportement sur Melde avec des oscillations fixes sans propagation. Où est la différence ?
→ confinement qui donne ondes stationnaires.

III - Ondes stationnaires

A) Superposition de deux OPPH contra propageantes

Quand OP rencontre extrémité fixe, elle peut se réfléchir. Regardons alors ce que donne la superposition de 2 OPPH de même freq, même phase, même amplitude mais se propageant en sens opposés :

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx)$$

Par $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, on a

$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos(\omega t)\cos(kx)}$$

Les variables x et t sont découplées ! Le facteur $\cos(kx)$ fixe l'amplitude de l'oscillation en chaque point et le facteur $\cos(\omega t)$ donne l'oscillation temporelle identique en chaque point à l'amplitude et au signe près. Il n'y a plus de propagation de la phase, c'est une onde stationnaire !

On identifie des noeuds là où $\cos(kx) = 0$ et les ventres là où $|\cos(kx)| = 1$. Deux noeuds sont séparés de $\frac{\lambda}{2}$, $\overline{m}$ pour 2 ventres, 1 n et 1 v de $\lambda/4$.

Schéma sur slide.

On a trouvé cette solution from OPPH donc sol de D mais est ce que ce sont les seules formes découplées qui vérifient D ?

B) Séparation des variables dans D

On cherche $y(x,t) = f(x) \times g(t)$

Dans D on a $g(t) f'' = \frac{1}{c^2} f g''$

Soit en séparant les variables

$$\underbrace{\frac{f''}{f}}_{(x, \cancel{y})} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{g''}{g}}_{(\cancel{x}, y)} = K(\cancel{x}, \cancel{y}) = cste.$$

Si $K > 0$, solutions en x sont des exponentielles réelles → pas de CL ok avec confinement.

Donc $K = -k^2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On a alors $f'' = -k^2 f$

↳ $f(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)$

et $g'' = -\omega^2 g$ avec $\omega^2 = c^2 k^2$ (rel dispersion)

et $g(t) = \alpha' \cos(\omega t) + \beta' \sin(\omega t)$

C'est la forme la plus générale pour des ondes stationnaires.

C) Conditions aux limites, modes propres et résonances

• Cas libre, fixée aux deux bouts

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \alpha = 0$$

et $\sin(kL) = 0$

donc $f(x) = \beta \sin(kx)$ et $\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}$ $n \in \mathbb{N}^*$

Les CL ont quantifiés les valeurs possibles du vecteur d'onde et donc de la fréquence. Ce sont les modes propres de la corde. $\boxed{f_n = \frac{nc}{2L}}$ ie mouvements sans excitation maintenue.

Rq. interf. constr.

Le mode $n=1$ est appelé fondamental $f_1 = \frac{c}{2L}$.
Les modes $n>1$ harmoniques. $f_n = n f_1$.

$\nexists$ $f < f_1$ Milieu confiné $\Leftrightarrow$ passe-haut. Analogie puit quantique.

Sol générale oscillations libres $y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$

Pour la corde de Melde ici, un peu différent,
$y(0,t) = y_0 \cos(\omega t)$ et $y(L,t) = 0$
$\rightarrow$ oscillations forcées.

On trouve alors $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t) \dfrac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)}$

diverge $\sin(kL) = 0$ ie $k_n = \frac{n\pi}{L}$, modes propres !

C'est la résonance. Quand la fréq d'excitation coïncide fréq. propre, amplitude $\nearrow$! En pratique, l'amortissement qu'on a négligé empêche divergence $+\infty$.

Bien distinguer modes propres vs résonances. Ici, les deux coïncident (syst. linéaire sans amortissement)

Vérification expé qualitative.
Avec $L =$ et $\mu =$ on a

$c =$ et $f_1 =$ $f_2 =$ $f_3 = \dots$

D) Équivalence des deux descriptions

On a mq 2 ondes prog → onde statio.
Et dans l'autre sens?

$$A\cos(\omega t - kx) = A\cos(\omega t)\cos(kx) + A\sin(\omega t)\sin(kx)$$

2 ondes statio en quadrature de phase → onde prog

⟺ !! Chaque famille forme base sol de D. Il faut choisir en fonction de la φ du prob (libre vs confiné).

On a bouclé la boucle.

Conclusion D'Alembert universelle équation d'onde dans pleins de domaine nous donne progressive + stationnaire.

Concepts en particulier au cœur de la musique. Instruments à vent superposition des deux. Même note mais timbre flûte (ouvert/ouvert) vs clarinette (ouvert / fermé)
Aussi cavité laser en optique ou puit quantique

Biblio : Dunod PCSI et PC. H prépa Ondes
Feynman 1. Soutif Vibrations
Perez Ondes Chaigne Ondes acoustiques

questions : Impédance! Dispersion, énergétique.