12 - Traitement d'un signal. Étude spectrale

P2

Manipulations possibles :

- Filtres en tout genre (RC) Bode quanti
- Modulation AM quali
- Démodulation synchrone quali
- Démodulation crête
- Étude spectrale quali
- Filtrage optique (Abbe)

Niveau : PSI

prérequis : électrocinétique, séries de Fourier, systèmes linéaires invariants dans le temps, diagrammes de Bode

Introduction

Un signal est la variation temporelle d'une quantité physique portant une information, par opposition au bruit. Il peut s'agir de plein de grandeurs physiques : tension, pression acoustique, intensité lumineuse...
Le bruit va être toute composante indésirable qui se superpose au signal utile et gêne son interprétation. Par ex le 50Hz du réseau qui gêne un électrocardiogramme ou la turbulence atmosphérique qui brouille l'image d'une étoile.

Le traitement du signal regroupe l'ensemble des méthodes mathématiques permettant de modifier des signaux ou d'en extraire de l'information. Exs radio, numérisation musique...

Pour agir efficacement sur un signal, il faut d'abord le caractériser. Et l'outil central pour ça c'est l'analyse spectrale : au lieu de regarder le signal en fonction du temps, on le regarde en fonction de la fréquence. C'est cette représentation fréquentielle qui va nous permettre de comprendre et prédire l'effet d'un traitement.

I- Analyse spectrale d'un signal

A) Décomposition en série de Fourier

Tout signal physique périodique de période T peut être décomposé comme Σ de signaux sinus.

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt$

$$b_t = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

On peut réécrire sous forme amplitude-phase, souvent plus parlante physiquement :

$$g(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Chaque terme est une sinusoïde à la fréquence nf sauf
$n=0$ qui est la composante continue $\Rightarrow \langle g \rangle$.
$n=1$: fondamental de même période que le signal
$n \geq 2$: harmoniques de rang n.

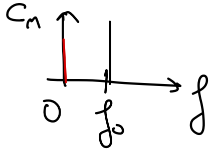
Spectre du signal : graphe c_n en fonction de nf. C'est un spectre discret dont les fréquences présentes sont des multiples du fondamental.

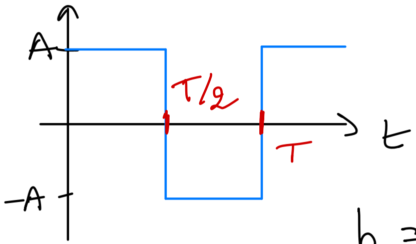
Rq généralisation signal non pério TF, spectre continu !

C'est la richesse harmonique qui détermine la forme ou le timbre du signal $\rightarrow$ piano vs clavecin à la même note.

En pratique, on calcule d'abord la valeur moyenne et on regarde la parité : g paire $\rightarrow b_n = 0 \ \forall n$
g impaire $\rightarrow a_n = 0 \ \forall n$.

Exemple du signal créneau :
(d'abord juste un sinus)





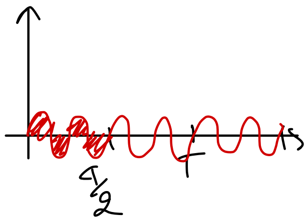
impair, $\langle e \rangle = 0$

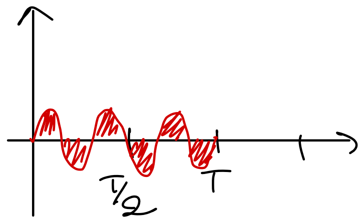
$a_n = 0 \ \forall n$

$$b_n = \frac{2A}{T}\left[\int_0^{T/2} \sin(\omega n t)\,dt - \int_{T/2}^{T} \sin(\omega n t)\,dt\right]$$

Si n pair $\rightarrow 0$

Si n impair





$$\rightarrow b_{2p+1} = \frac{4A}{T}\underbrace{\int_0^{T/2} \sin(\omega(2p+1)t)\,dt}_{\frac{2}{\omega(2p+1)}}$$

$$b_{2p+1} = \frac{4A}{(2p+1)\pi}$$

$$e(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1}\sin((2p+1)\omega t)$$

- Seules les harmoniques impaires
- Amplitudes décroissent en $\frac{1}{n}$ lent car très discontinu.

Les harmoniques de rang élevé décrivent les discontinuités.

Vérifions expérimentalement.

B) Obtention expérimental du spectre d'un signal créneau

Avec GBF, envoie créneau 1kHz

A l'oscillo on passe en FFT et on visualise le spectre.
que fait l'oscillo : Fast Fourier Transform
- échantillonnage → on en reparle.
- normalement avec K points pour lesquels on doit faire K opérations → complexité en K^2
(Somme de Riemann pour approximer l'intégrale)

Mais FFT inventée par Cooley et Tukey en 1965
exploite symétries et fait une sorte dichotomie → $K\log K$
ce qui rend possible l'étude spectrale en temps réel.
Un des algos les plus importants du 20e siècle.

Observation : un pic à 1kHz (essayez amplitude V_{RMS})
le fondamental.
Ensuite les harmoniques impaires avec qualitativement décroissance en $\frac{1}{n}$. Si temps parenthèse fenêtrage. (convolution).

L'oscillo a dû numériser → échantillonner
et il ne faut pas le faire n'importe comment.

C) Numérisation et critère de Shannon-Nyquist

Aujourd'hui, immense majorité du traitement du signal se fait numériquement. Il faut convertir $s(t)$ analogique en une suite discrète de valeurs.

L'étape clé de cette conversion s'appelle l'échantillonnage : on prélève les valeurs du signal à intervalles réguliers $T_e = \frac{1}{f_e}$. Quelle f_e ?

Code python interactif Apparition fréquence "fantôme" $f_e - f$

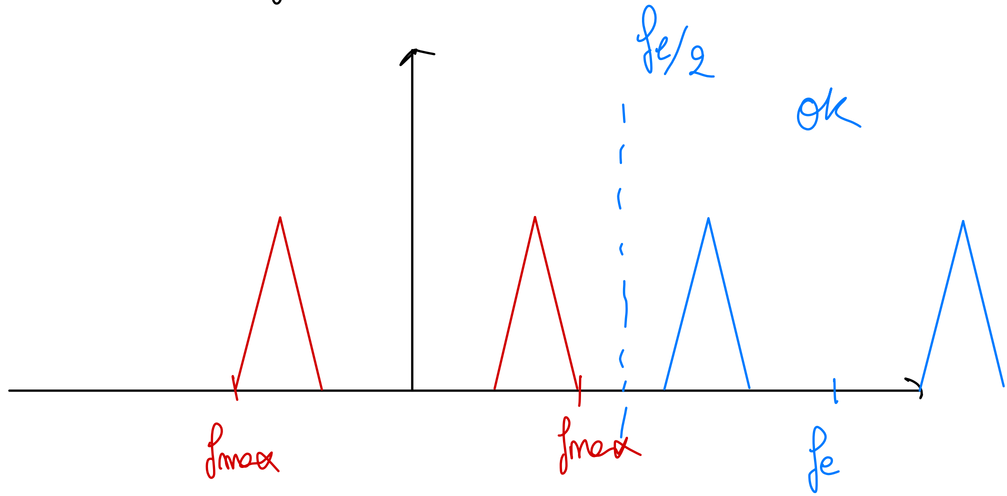
↳ C'est l'effet stroboscopique (hélice ou roue)

On a perdu de l'information de manière irréversible.

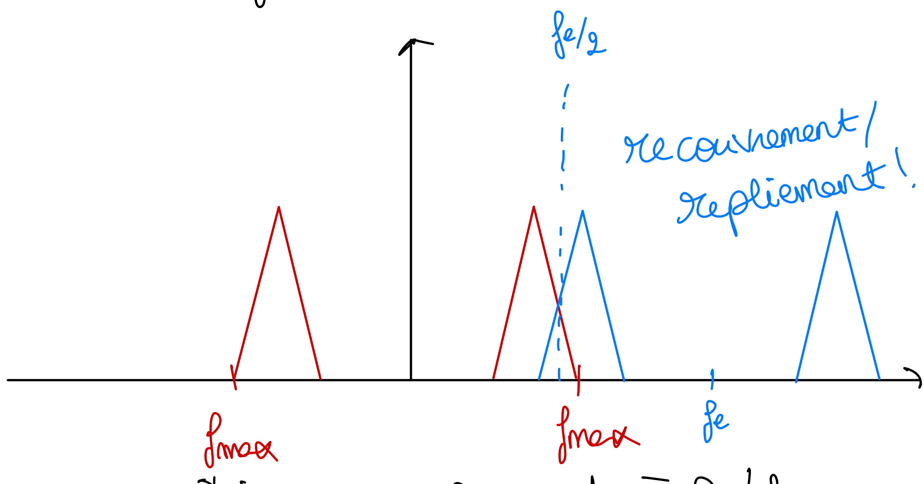
Regardons ce qu'il se passe dans le domaine fréquentiel

Echantillonne un signal ⟺ multiplier par peigne de Dirac de période T_e (image). Donc en fréquentiel : convolution avec TF du peigne → un peigne de période f_e.

$f_e > 2 f_{max}$



$f_e < 2 f_{max}$



Symétrique par rapport à $f_e/2$.

Critère de Shannon - Nyquist

$$\boxed{f_e > 2 f_{max}}$$ 1949

ODG : CD audio $f_{max} = 20\,kHz$ (Audition humaine)

taux d'échantillonnage de 44,1 kHz ok

Téléphonie : bande 300-3400Hz → 8kHz ok

Si temps montrer repliement à l'oscillo.

En pratique on ne connaît pas le signal qui contient souvent du bruit haute fréquence et on ne peut pas distinguer du bruit replié du véritable signal

↳ Il faut filtrer les hautes fréquences avant d'échantillonner.

On parle de filtre anti-repliement : opération fondamentale du traitement du signal.

II - Filtrage

A) Principe du Filtrage linéaire

Un filtre est un SLIT caractérisé par sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. Reçoit $e(t)$ et sort $s(t)$.

Si $e(t)$ périodique $e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(\omega n t + \varphi_n)$

Par le théorème de superposition (car linéaire)

$$s(t) = |\underline{H}(0)| E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(n\omega)| E_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \arg(\underline{H}(\omega)$$

Chaque composante peut être traitée indépendamment.

amplitude × module, phase décalée de arg.

Propriété fondamentale : Un filtre linéaire ne crée pas de nouvelles fréquences ! Seules les amplitudes et phases des fréquences exactes sont modifiées

On représente la fonction de transfert dans un diagramme de Bode

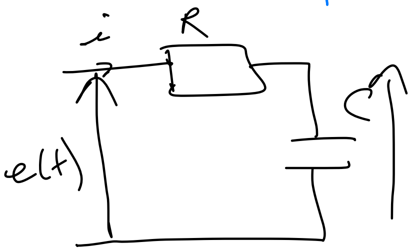
$$G\,(dB) = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|) \text{ en fonction de } \log(f).$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) \text{ en fonction de } \log(f)$$

On définit la bande passante à $-3dB$ comme l'intervalle de fréq. où $G \geq G_{max} - 3dB$ ie $|H| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ (division de puissance par 2).

Nous on veut couper HF → passe bas → RC.

B) Filtre passe-bas RC



pont diviseur

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{Z_c}{R+Z_c} \quad Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

$$= \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ la pulsation de coupure

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Comportements limites :

- BF $(\omega \ll \omega_0)$ $|H| \to 1$ donc $G \to 0$ dB passe
  et $\varphi \to 0$
- HF $(\omega \gg \omega_0)$ $|H| \simeq \frac{\omega_0}{\omega}$ $G \simeq -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ pente -20dB/déc
  signal atténué.
  $\varphi \to -\frac{\pi}{2}$
- A la coupure $\omega = \omega_0$ $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $G = -3$dB
  donc bp $[0 ; \omega_0]$
  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Vérification expé $\to$ tracé diagramme de Bode. Mesures R et C au RLC mètre $\to$ $f_{0_{théo}} = \quad \pm$

Là où $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ou $G = -3$dB $\to$ $f_{0_{expé}} = \quad \pm$

Zsave.

+ Envoi créneau $\to$ triangle coupe les harmoniques de rang élevé
  ↳ arrondi

Ici filtre analogique mais peut se faire numérique (pas anti-repliement mais tout le reste, beaucoup + flexible)

C) Filtre numérique par différences finies

Equa diff du RC

$$\frac{e-s}{R} = C\frac{ds}{dt} \quad \text{soit} \quad RC\frac{ds}{dt} + s = e$$

Pour signal numérisé on a $e_k = e(kT_e)$

On fait différences finies pas ex schéma d'Euler explicite

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=kT_e} \simeq \frac{s_{k+1}-s_k}{T_e}$$

Soit $RC\,\frac{s_{k+1}-s_k}{T_e}+s_k=e_k$ avec $\alpha=\frac{T_e}{RC}$

On a $\boxed{s_{k+1}=(1-\alpha)s_k+\alpha e_k}$ Relation de récurrence
↳ algorithmie.

Moyenne pondérée par α entre s_k et e_k.

Si $\alpha \gg 1$ donc $T_e \gg RC$ s_{k+1} suit e_k → passe
Si $\alpha \ll 1$ donc $T_e \ll RC$ s_{k+1} suit s_k → sortie évolue lentement, passe bas.

Avantages du filtrage numérique :
- Pas de composants
  ↳ reproductible, toutes les H sans changer, modification simple des paramètres.

Limite : Différences finies introduisent artefacts, questions d'exactitude et de stabilité. Ok pour $f \ll f_e/2$.

On a vu filtrage linéaire – ana ou num – ne crée jamais de nouvelles f. Des fois on veut déplacer : vers les HF pour transmettre sur grandes distances ou vers $f=0$ pour extraire un signal faible noyé dans du bruit.
↳ Ces déplacements nécessitent opération non linéaire

III - Traitements non-linéaires

Opération non-linéaire de base : la multiplication.
2 applications fonda : modulation en amplitude et détection synchrone.

1) Modulation d'amplitude

Transmettre un signal audio par voie Hertzienne directement pose 2 pb : $f \sim 100\,Hz - 7,5\,kHz$

- taille antenne $\sim \lambda/4$ 75 km à 1 kHz
- encombrement spectral

↳ modulation : on accroche l'information à une porteuse HF.
En modulation d'amplitude, on a

$$s(t) = A\left[1 + m\cos(\omega_m t)\right]\cos(\omega_p t)$$

On veut entrée toujours ≥ 0 donc $m \in]0,1[$ sinon surmodulation.
En développant le cos

$$s(t) = A\cos(\omega_p t) + \frac{Am}{2}\cos((\omega_p + \omega_m)t) + \frac{Am}{2}\cos((\omega_p - \omega_m)t)$$

On a créé deux nouvelles fréquences $f_p \pm f_m$. Le spectre du signal utile a été translaté de f_m à autour de f_p.

Pour la radio AM → $f_p \sim 1\,MHz$ → antenne $\sim 75\,m$
gros mais faisable.

Si temps montrer à l'oscillo en temporel + FFT.
Reste à démoduler. Peut se faire avec détection Synchrone qui est encore + puissante

B) Détection synchrone

Pb courant en φ : un signal très faible complètement noyé dans le bruit. On peut d'abord penser à un passe-bande mais devrait être extrêmement sélectif, et le bruit de la bp subsisterait.

La détection synchrone fait mieux. Repose sur × comme modulation mais utilisée à l'envers.

Supposons que le signal d'intérêt est sin de pulsation ω_s connue.
↓
excitation.

$$s(t) = S_0\cos(\omega_s t + \varphi)$$

S_0 et φ inconnues.

On le multiplie par $\cos(\omega_s t)$

$$\hookrightarrow p(t) = \frac{S_0}{2}\cos\varphi + \frac{S_0}{2}\cos(2\omega_s t + \varphi)$$

Pour tout le reste, le bruit, à $\omega \neq \omega_s$, on a des termes oscillants et pas de composantes continues. On met alors un passe bas très de ω_0 très bas. Résultat

$$\boxed{S_{dém} = \frac{S_0}{2}\cos\varphi}$$ et tout le bruit a disparu quelque soit son amplitude.

Rq : Si on veut φ et S_0 indépendemment, on fait une autre détection synchrone avec $\sin(\omega_s t)$

Rq : Passe bas de 0,01Hz de freq de coupure beaucoup plus facile que passe bande de 10kHz avec bande passante de 0,01Hz. × ramène tout à freq nulle où + facile d'être sélectif.

Très efficace même pour des signaux où le bruit a une amplitude 1000 fois + grande que le signal. Utilisée partout en physique expérimentale.

Notons que on utilise ici tous les bouts de cette leçon : analyse spectrale, opération non-linéaire et filtrage linéaire.

Conclusion On a vu : analyse spectrale outil central
numérisation impose Shanon
Filtrage linéaire modifié sans créer
traitements non linéaires.

Ouverture : pas seulement élec
optique Abbe avec filtrage dans Fourier,
FFT utilisée partout → compression d'images ou de musique.

Biblio : Dunod PSI   Bréal PSI électronique
Dunod Bellier Expériences de φ

Cottet Traitement des signaux et acquisition de données

Cours Jérémy Neveu