

PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

①

Niveau: PC

Prérequis: thermo à l'équilibre

Analyse vectorielle

Hydrodynamique (Re, η)

Électrocinétique (loi d'Ohm locale)

Intro Jusqu'à aujourd'hui, en thermodynamique, on s'est intéressé à des systèmes à l'équilibre thermodynamique. Mais dans la nature c'est rarement le cas, il y a des gradients de température, concentration, vitesse, ...

On appelle phénomènes de transport les mécanismes par lesquels des grandeurs physiques extensives (énergie, charge, etc de mouvement...) sont transférées d'une région de l'espace à une autre.

Ces phénomènes se rangent dans trois grandes catégories

	mécanisme ψ	support matériel
diffusion (conduction)	agitat ^o micro	oui
convection (advection)	mouvement macro	oui
rayonnement	ondes électromag	non (vide etc)

Exemple parlant de la vie quotidienne: on chauffe H_2O de l'eau dans une casserole sur du gaz.

- flamme rayonne + ~~convection~~ convection forcée et conduction
- conduction dans le métal
- gaz chaud moins dense \uparrow \rightarrow convection naturelle

On voit que dans une situat^o banale, les 3 coexistent chacun dominant dans son domaine.

Transport pas seulement thermique. Encore ici matière diffusion moléculaire lente. Convection rapide. On reviendra sur compétition diffusion / convection mais on va commencer par modéliser le transport diffusif qui possède un cadre mathématique unifié remarquable pour la chaleur, les particules, la qté de mouvement ou la charge.

I. Le transport diffusif.

A) Equilibre thermo-local et équation de conservation

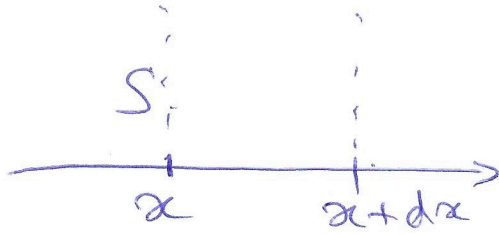
Syst. pas à l'équilibre global.

Mais on veut quand même utiliser les lois de la thermo. On va découper en volume minuscule de taille

d la h_q $\delta \ll d \ll L$ $\text{air } \delta \sim 100 \text{ nm}$ $L \sim \text{m}$
 $\text{eau } \delta \sim 10^{-10} \text{ m} \Rightarrow d \sim \text{nm}$
 micros, μm \uparrow macro

Dans chaque volume m \acute{e} tro, l'equilibre interne permet de d \acute{e} finir $T(\mathbf{r}, t)$, $\rho(\mathbf{r}, t)$, ... localement. C'est l'hypoth \acute{e} se ETL. (3)

Bilan 1D



On consid \acute{e} re une grandeur extensive conserv \acute{e} e X (l' \acute{e} nergie interne, N le nombre de particules, Q la charge) qui a une densit \acute{e} volumique ρ_x et de flux surfacique j_x .

Entre t et $t + dt$, la conservation de X implique

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_x S dx)}{\partial t} &= \text{ce qui rentre} - \text{ce qui sort} \\ &= j_x(x) S - j_x(x+dx) S \\ &= -\frac{\partial j_x}{\partial x} S dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

et en 3D
$$\frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_x = 0$$

universelle $\forall X$ et exacte si grandeur conserv \acute{e} e. Pour aller plus loin on a besoin d'une loi en plus qui va d \acute{e} crire comment les inhomog \acute{e} nit \acute{e} s impactent j_x .

B) Lois phénoménologique de diffusion

(4)

Diffusion: flux dirigé dans le sens qui réduit les inhomogénéités. La loi + simple = flux proportionnel au gradient de la grandeur intensive associée -
 $U \rightarrow T \quad N \rightarrow m$

Loi de Fourier 1822 pour diffusion thermique

$$\vec{J}_e = -\lambda \text{grad } T$$

λ conductivité thermique
 ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1} > 0$)

du chaud vers le froid.

gradient faible, milieu isotrope.

Loi de Fick 1855 diffusion de particules

($\propto \text{grad } \mu$
 $\mu = \mu_0 + k_B T \ln(\dots)$
 pour dilués)

$m \text{ part/m}^3$

$$\vec{J}_m = -D \text{grad } m$$

$D \text{ m}^2/\text{s}$

coef de diffusion > 0

\bar{m} structure ds + concentrés
 les les - ...

On pourrait continuer loi d'Ohm $\vec{J}_{el} = -\sigma \text{grad } V$

loi de Newton

fluide visqueux

$$\tau = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

~~On coefficients de transport~~

	gaz	Liq	Sol
$D_{th} (\text{m}^2/\text{s})$			
D_{part}		$\sim 10^{-9}$	
ν		$\sim 10^{-6} (\text{eau})$	

c) Equation de diffusion

5

Pour la chaleur $\rho_x = \rho$ (J/m³) = $\rho c_p T$

~~adjectif~~
massique

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = 0$$

incom
constant

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \Delta T = D_{th} \Delta T$$

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad \text{diffusivité thermique}$$

↑
K

m²/s comme D.

Particules $\rho_x = m$ (part/m³)

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D \Delta m \quad \text{directement.}$$

~~$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{g}{\epsilon_0} \rho_{el} \right) \quad \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \Delta v_z \right)$$~~

plus vraiment diffusion

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

Propriétés fonda :

- irréversibilité $t \rightarrow -t$ pas invariante.
- loi d'échelle $\tau_{diff} \frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{T} \quad D_{th} \Delta T \sim D_{th} \frac{T}{L^2}$

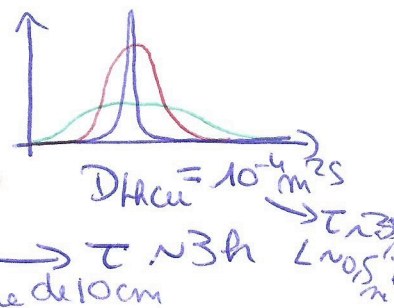
$$\Rightarrow \tau_{diff} \sim \frac{L^2}{D_{th}}$$

• étalement

ODh de coef de diffusion.

$D_{th} \text{ eau} \sim 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

$D_{th} \text{ air} \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$



$D_{sucrose} \sim 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$

$D_{sucrose} \sim 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s} \rightarrow \tau \sim 3h$
vitesse de 10cm

On a un modèle, testons le!

⑥

II - ~~Régime~~ Diffusion thermique dans un barreau de cuivre

AS Régime sinusoïdal forcé.

Ici, on impose une condition aux limites

$$T(0,t) = T_{\text{moy}} + \Theta_0 \cos(\omega t)$$

On pose $\Theta = T - T_{\text{moy}}$ on vérifie l'équation de

diffusion $\frac{\partial \Theta}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$

On cherche la réponse $e^{i\omega t}$.

$$\Theta = \Theta_m(x) e^{i\omega t}$$

syst linéaire.

$$i\omega \Theta_m = D_{th} \frac{d^2 \Theta_m}{dx^2}$$

oscillateur harmonique avec $k^2 = \frac{i\omega}{D_{th}}$ complexe.

$$i = e^{i\pi/2}$$

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2D_{th}}} = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2D_{th}}{\omega}}$$

épaisseur de peau

$$\Theta_m(x) = A e^{kx} + B e^{-kx} \quad A=0 \text{ sinon diverge.}$$

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$$

Amplitude qui décroît exponentiellement. oscillations déphasées.
Analogie avec effet de peau en électromag.

A.N effet de cave

Sol terrestre $D_{th} \sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ fluctuations annuelles
 $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ an}} \rightarrow \delta \approx 2.3 \text{ m}$

A 3m de profondeur, $T \approx \text{cste} \rightarrow$ cave vin!

B) Dispositif expérimental

Barre de cuivre de 50 cm de long ~~isolée~~ isolée thermiquement.

On a un module Peltier piloté par Arduino qui impose un flux thermique assés pour imposer une variation sinusoïdale de T de période 300 s à une extrémité.

7 thermocouples à 1, 5, 9, 13, 22, 34 et 49 cm.

On a laissé tourner le dispositif pour atteindre un régime établi.

$T_i(t)$ pour les thermocouples.

On observe des oscillations \rightarrow avec x .

Retard croissant,

ben les derniers pas de variations.

exploitation quantitative: on mesure l'amplitude pour les différents thermocouples et on doit avoir

$$A = \theta_0 \exp(-x/\delta) \text{ donc } \ln(A) = \ln(\theta_0) - \frac{x}{\delta}$$

droite de pente $-\frac{1}{\delta}$.

incertitude de type A, on en déduit δ puis

$$D_{th} = \frac{\delta^2 \omega}{2}$$

$\frac{2\pi}{300}$
↓

$$\lambda = D_{th} \times \rho \times c_p$$

$\lambda_{th \approx 0} = 401 \text{ W/m/K}$

Validation modèle diffusion. Dans les fluides souvent dominé par convection. comment les comparer? (8)

III - Diffusion ou convection qui domine?

À temps caractéristiques lois d'échelle.

Loi d'échelle diffusion $\tau_{diff} \sim \frac{L^2}{D}$

La convection a une loi d'échelle très différente.

En convection, la grandeur d'intérêt est transportée par les mouvements massifs du fluide à la vitesse u .

$\tau_{conv} \sim \frac{L}{u}$ linéaire en L , plus favorable aux grandes distances.

Nombre de Péclet

Avec ces deux temps, on peut définir un nombre

Sans dimension: $Pe = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{Lu}{D}$

$Pe \gg 1 \rightarrow$ convection domine largement
diffusion négligeable.
fluide en mouvement

$Pe \ll 1 \rightarrow$ diffusion: solides ou fluides au repos
ou des petites échelles.

Cas particulier de la pe de mouvement:

$$D = \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad \tau_{diff} = \frac{L^2 \rho}{\mu}$$

$$Pe = \frac{Lu\rho}{\mu} = Re !$$

B) ODC

saucisse dans saucisse goutte colorant.

base de cuire $Pe = 0$
 $u = 0$

$U \sim 1 \text{ mm/s}$ $D \sim 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$

diffusion prédomine surtout solide $Pe \sim 10^5 \gg 1$ OK avec expérience!
ou petites échelles biologiques.

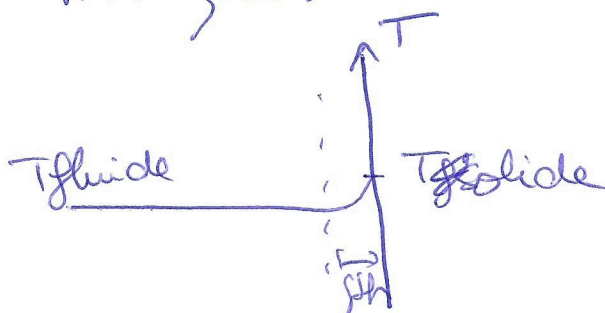
C) Conduco convection

quand les deux coopèrent

* Interface solide / fluide.

couche limite thermique.

Solide : conduction
fluide : convection au loin



échange à l'interface modélisé par loi de Newton

$$J_{\text{pausi}} = h (T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}}) \quad \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

h : coef conduco - convec dépend de tout!
sauf du solide!

$$St_{th} \sim \frac{J_{\text{fluide}}}{R}$$

Couplage diffusion convection.
Condition aux limites,

⇒ Conclusion. On a pas parlé de rayonnement.

prochaine fois loi d'échelle $\varphi \sim T^4$ loi de Stefan
Hautes températures / dans le vide

