

# 4- Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide (F2)

Manipulateurs possibles:

Tube de Pitot

Vidange de Torricelli

Notes sur la manip:

Niveau: PC

prérequis: Cinématique des fluides, équation de NS, viscosité, nombre de Reynolds, base de Fourier

Introduction NS décrit complètement la dynamique d'un fluide newtonien incompressible. Mais non linéaire, d'ordre 2 en espace et en pratique extrêmement difficile à résoudre. Pour la simplifier, on cherche à négliger certains termes. Aujourd'hui on va s'intéresser au modèle de l'écoulement parfait qui consiste à négliger la viscosité. On va voir comment cette hypothèse simplifie Navier-Stokes et permet d'arriver à la relation de Bernoulli qui est l'un des outils les plus importants pour les ingénieurs des fluides qui permet par exemple de comprendre l'origine de la portance d'un avion ou les phénomènes de cavitation ou d'effondrement des ailes bouchées.

## I- Modèle de l'écoulement parfait

### A) Définition

Un écoulement est parfait si on peut y négliger tous les phénomènes de transport diffusif : la viscosité (qé de même) et la diffusion thermique.

2 conséquences immédiates :

- forces de contact entre particules de fluide se limitent aux forces de pression (normales aux surfaces). Pas de contrainte tangentielle entre les couches de fluide.
- Pas de dissipation d'énergie.  $\eta = 0 \Rightarrow$  réversible,  $\lambda = 0 \Rightarrow$  adiabatique. Ensemble isentropique!

Distinction importante :

fluide parfait vs	écoulement parfait.
$\eta = 0$	$\eta \Delta v$ négligeable
assez rare	très courant
He superfluide 2, 17K	

mais négligeable devant quasi?

On compare le terme visqueux et le terme inertiel (advection)

$$\|\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\| \sim \frac{\rho v^2}{L} \quad \|\eta \nabla^2 \vec{v}\| \sim \eta \frac{v}{L^2}$$

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta} \quad \text{déjà vu}$$

le modèle de l'écoulement parfait est valable pour

$Re \gg 1$  ie quand l'inertie domine la viscosité

(GP n'est pas fluide parfait  $\eta \propto \rho \nu_{\text{eff}}$ )

## B) Equation d'Euler

Dans les zones où l'écoulement est parfait, on supprime le terme visqueux de NS

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

C'est l'équation d'Euler (1757)

NS: 1822-1845

Rg: Contrairement à NS, Euler est valable sous cette forme aussi pour les fluides compressibles.

Réécriture sous forme de Lamb:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

### Cl Domaine de validité et couche limite

Près d'un obstacle, pour un fluide réel, on a vu que la condition d'adhérence impose  $\vec{v} = \vec{0}$  à la paroi. Entre la paroi et le cœur de l'écoulement, il existe une zone de fort gradient de vitesse où la viscosité est prépondérante: c'est la couche limite.



$y < \delta$ : forte variation de  $v$ , forces visqueuses dominant

$y > \delta$ :  $v = v_0$  écoulement parfait valable

Dans la CL, équation de diffusion  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v}$

$$\rho \frac{U}{L} \sim \eta \frac{U}{\delta^2} \quad \tau = \frac{L}{U} \text{ convection}$$

$$\rho \frac{u^2}{L} \sim \eta \frac{u}{\delta^2}$$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta L^2}{\rho u L}} \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

Si  $Re \gg 1$ ,  $\frac{\delta}{L} \ll 1$  fine couche limite.

A.N. Voiture  $L \sim 1 \text{ m}$   $v \sim 30 \text{ m/s}$   $\nu_{\text{air}} \sim 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$   
 $R \sim 2 \cdot 10^6$   $\delta \sim 0,7 \text{ mm}$

CL très fine. Hors de celle-ci, le modèle parfait est applicable  $\rightarrow$  pertinence.

Conditions aux limites.  $\Delta$  Contrairement à NS fluide réel. Pour Euler, la condition au limite est seulement  $v_{\perp} = 0$  à la paroi, on ne sait rien de  $v_{\parallel}$ , le glissement est autorisé. En vrai c'est la CL qui fait le raccordement.

Et donc Euler plus simple que NS (ordre 1 en espace) mais toujours compliqués. On va essayer maintenant de se ramener à une équation scalaire en faisant un bilan sur une ligne de courant pour arriver à

## II- Relation de Bernoulli

### A) Démonstration

Hypothèses :

- Écoulement parfait
- Écoulement stationnaire
- Écoulement incompressible
- forces volumiques : pesanteur uniquement
- Référentiel galiléen.

Euler forme de Lamb stationnaire

$$\vec{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}$$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}(gz) \quad \text{et } \rho \text{ cste donc rentre dans } \vec{\nabla}$$

$$\int_A^B (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} + \vec{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \vec{0} \quad (*)$$

On intègre le long d'une ligne de courant entre A et B.

$$(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{car } (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \perp \vec{v} \parallel d\vec{l}$$

$$\int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A) \quad \text{d'où ici}$$

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + p_A + \rho g z_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + p_B + \rho g z_B$$

Donc  $\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z$  grandeur conservée sur une ligne de courant

Bernoulli "faible"

Si  $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ , grandeur conservée dans tout le fluide

Bernoulli "fort".

## B) Interprétation énergétique

La relation de Bernoulli peut être vue comme la conservation d'une énergie mécanique volumique. On l'appelle la charge

$$C = \underbrace{\frac{1}{2} \rho v^2}_{E_c \text{ volumi}} + p + \underbrace{\rho g z}_{E_{pp} \text{ volumique}} \quad \text{en } \text{J/m}^3 \text{ ou } \text{N/m}^2$$

$p$  énergie potentielle volumique  $\vec{F} = -\vec{\nabla} p = -\vec{\nabla} E_p !$

On parle alors de pertes de charge dans les écoulements visqueux: la visc. dissipe de l'énergie mécanique en chaleur et la charge  $\psi$  - C'est ce qui se passe dans l'écoulement de Poiseuille par exemple.

Rq: forme enthalpique de Bernoulli,

Pour un écoulement parfait - isentropique  $dS = 0$

$$dh = v dp + T ds \Rightarrow dh = \frac{dp}{\rho} + 0$$

d'air  $h + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cte}$  le long d'une ligne de courant.

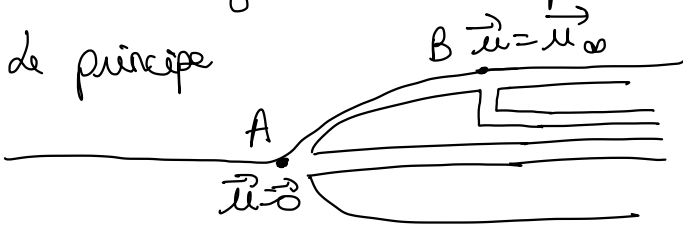
OK aussi en compressible contrairement à classique

( $h = u + \frac{p}{\rho}$   $u = \text{cte}$  (adiabatique réversible))

### C) Vérification expérimentale: le tube de Pitot

Principe théorique

Ces tubes ont été inventés par Henri Pitot au XVIII<sup>e</sup> siècle pour mesurer la vitesse de la Seine et ils sont encore utilisés aujourd'hui, en particulier sur les avions.



girage du Pitot  
du AF447 Rio  
Paris 2009  
contribué au crash

en A  $v_A = 0$  point d'arrêt

Entre  $\infty$  et A  $\frac{1}{2} \rho v_0^2 + p_0 = p_A$  ( $z_0 = z_A$ )

Point B  $v_B = v_0$   $P_B = P_0$  (en vrai CL mais pas de grad de pression normal donc pareil que au bord de la CL).  
 d'où  $\Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho v_0^2$

Navip. En préparation tracer  $\Delta P = f(v)$   
 On cherche le  $\chi_{red}$  et  $\rho$  qu'on peut composer à trois mais par obligé.

Anémomètre à fil chaud: fil chauffé par Joule à puissance connue. Plus  $v \uparrow$ , refroidissement convectif  $\uparrow \rightarrow R$  diminue.  
 $R$  est relié à  $v$ .

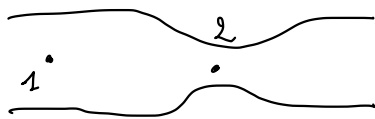
Manomètre: Transducteur piézoélectrique:  $\Delta P \rightarrow$  déformation  $\rightarrow$  signal élec  
 (Forme idéale: Surface de Rankine).

On a vérifié expérimentalement Bernoulli. Couplé à la conservation du débit, cette relation permet de comprendre plusieurs phénomènes très concrets.

### III - Applications et limites du modèle parfait

#### A) Effet Venturi et applications 18<sup>e</sup> siècle

d'effet Venturi c'est l'effet qui explique le fonctionnement des trompes à eau comme on les utilise en chimie mais aussi certains risques médicaux quand les artères se bouchent partiellement.



Conservation du débit

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

## Bernoulli horizontal

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

Si  $S_2 < S_1$ ,  $v_2 > v_1$  et  $p_2 - p_1 < 0$  donc

dépression au niveau du col  $\rightarrow$  aspiration de l'air.

Application numérique à la sténose artérielle:

plaques qui rétrécissent artères  
Artère saine :  $d_1 \sim 5 \text{ mm}$   $v_{\text{sang}} \sim 0,5 \text{ m/s}$   
Sténose 80% diamètre  $d_2 \sim 2,5 \text{ mm}$

Conservation du débit  $v_2 = v_1 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 2 \text{ m/s}$

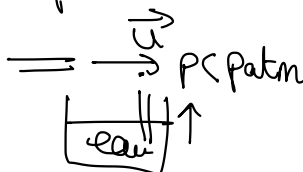
$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_{\text{sang}} (v_2^2 - v_1^2) \sim 2000 \text{ Pa} \sim 15 \text{ mmHg}$$

Pression artérielle normale 120/80 mmHg (systolique / diastolique)  
Coeur contracté / diastolique coeur relâché.

Donc 15 mmHg c'est significatif! Peut entraîner l'effondrement de l'artère ou si  $p < p_{\text{sat}} \rightarrow$  cavitation (bulles)

## B) L'atomiseur de parfum

Expérience qualitative 2 pailles et 1 verre



explications rapides.

Image sur slide.

## C) Écoulement courbe, effet Coanda 20<sup>e</sup>

On remonte à Euler. On s'intéresse à des lignes de courant courbe



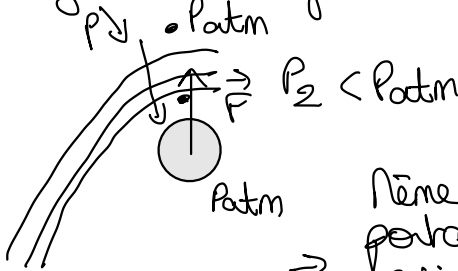
Base de Frenet.

Euler projeté sur  $e_n$  donne

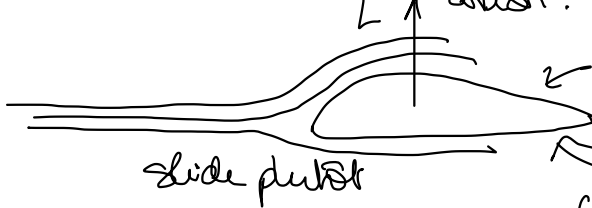
$$-\rho \frac{v^2}{R} = \frac{\partial P}{\partial m}$$

$P$  décroît quand on vers le centre de courbure des lignes de courant. Plus la courbure est forte ( $R$  petit), plus la dépression est importante.

Effet Coanda: quand un jet rencontre un obstacle, il est dévié. Des lignes de champ se courbent le long de la surface. Dépression. Force vers le haut qui peut compenser le poids.



Même mécanisme pour la portance de l'aile d'un avion.



extrados forte courbure → dépression

intrados très faible courbure  $P \approx P_{atm}$   
Il faut  $\Gamma$  non nul!

Si on suppose l'écoulement, on le trouve pas.  
Pg: on peut l'accentuer en mettant en rotation → Magnus.

D) limites du modèle de l'écoulement parfait

\* Déjà bien sûr si  $Re \ll 1$ ,  $\delta \approx L$  la CL c'est tout l'écoulement!

\* Mais même si  $Re \gg 1$ , la CL visqueuse a des effets irréductibles: paradoxe de D'Alembert:

Dans un écoulement parfait stationnaire irrotationnel la traînée est nulle quelque soit la forme de l'objet!

(Kelvin + Kutta-Jakowski ( $L = \rho v \Gamma$ )) dit que sans viscosité  $\Gamma = 0$  tout le temps donc pas de portance non plus!)

La résolution est dans la CL. Même infiniment fine elle a 2 effets:

- frottements visqueux. traînée de frottement
- décollement  $\rightarrow$  sillage. traînée de forme

Viscosité négligeable hors CL mais CL a un impact macro qui impacte finalement globalement

\* Autre limite: Isentropie.

- pas d'amortissement (onde sonore fluide)
- turbulence: cascade de Kolmogorov. nécessité de dissipation aux petites échelles!

Conclusion Partis de NS. On néglige  $\eta$ , valable  $Re \gg 1$  loin des CL et obtient Euler qui intégrée nous donne Bernoulli conservation de la charge. Plus d'applications.

curiosité

Dans le cadre du modèle de parfait, on peut montrer que  $\eta = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{v} = \text{cte}$  donc  $\vec{\omega} = \vec{0}$  si  $\vec{v} = \vec{0}$  au début.

Incompressible + irrotationnel  $\rightarrow \Delta\phi = 0$  avec  $v = \nabla\phi$

Equation de Laplace pour les écoulements potentiel  $\rightarrow$  Electrostatique.

Biblio : Hydrodynamique Physique Guyon Hulin

Dunod PC/PC\*

H Prépa NECA Flu

Questions Théorème de Kelvin

Bernoulli irrotationnelle

Ragnès

Kutta Joukowski

Exceptions d'Ambert (traînée de vagues force de masse ajoutée).

Penicelli

Slides : CL schéma

Pitor schéma

Venturi + Sténose (athérome plaque)

Portance aile