3- Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

F1

Manipulations possibles :
- $\boxed{\text{Écoulement de Poiseuille}}$
- Loi de Stokes, bille glycérol
- Bille soufflerie

Notes sur la manip : On est bien en statique dans les petits tubes et dans le vase de Mariotte
Pourquoi ça doit buller.
Le reynolds.

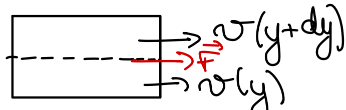
Niveau : PC

prerequis :
- Théorème de VB
- Equation de diffusion
- Forces de pression et équivalent volumique
- Description Eulérienne des fluides

Introduction sauce soja sucré vs sauce soja salée
ou plus probable qu'ils en aient : verre d'eau vs verre de miel
Echec du modèle fluide parfait, il manque quelquechose.

I - Notion de Viscosité

a) Mise en évidence expé et loi de Newton



Vidéo Youtube Couette plan. (huile silicone 20cst : végétale 200cst : moteur) (eau 1 cst)
Observations clés :
- fluide adhère aux parois (0 en bas v_0 en haut)
- Les couches rapides entraînent les couches lentes.
  → forces de cisaillement dans le fluide
- Régime établi : profil linéaire de vitesse.

Formalisé par la loi de Newton : Pour un écoulement de cisaillement $\vec{v} = v_x(y,t)\,\vec{e_x}$, la force tangentielle exercée par la couche du dessus sur la couche du dessous à travers un élément de surface dS orienté selon $\vec{e_y}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{df} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{e_x}}$$

η est la <u>viscosité dynamique</u> du fluide en Pa.s ou Pl (Poiseuille)

$\sigma = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$ en Pa est la <u>contrainte de cisaillement</u>.

Les fluides pour lesquels η est cst (indépendant du taux de cisaillement $\partial v_x / \partial y$) est dit <u>newtonien</u>. C'est le cas de l'eau, de l'air, des huiles simples ... On se restreint à ce cas dans toute cette leçon.

Rq : Il existe de nombreux fluides newtoniens : Sang (nutella) le ketchup ou la peinture qui sont rhéofluidifiant ou au contraire la Maïzena dans l'eau rhéoépaississant.

Voilà quelques ODG de viscosité (slide)

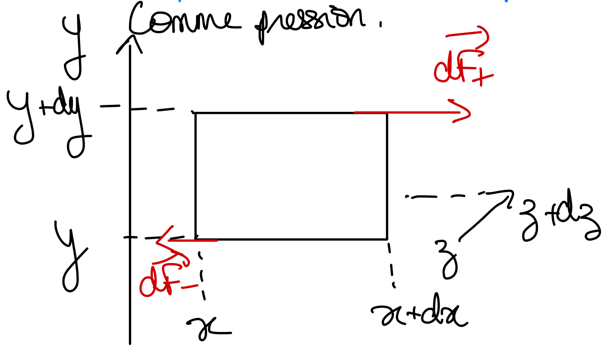
Air 20°C	$1{,}8.10^{-5}$ Pas	Eau 20°C	$1{,}0.10^{-3}$ Pa.s
Huile d'olive	0,1 Pa.s	Miel	~ 10 Pa.s

Varie sur plusieurs ordre de grandeur. Explique la différence de comportement eau vs miel!

η dépend de la température. Pour un gaz $\eta \nearrow$ avec T (agitat° therm), pour un liquide c'est l'inverse (on chauffe le miel ou l'huile). Dilatation

B) Equivalent volumique des forces de viscosité

Comme pression.



$$\vec{df} = \eta \left(\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y+dy} - \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y} \right) dx dz \vec{e_x}$$

$$\vec{df} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau \vec{e_x}$$

car incomp $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ $\longrightarrow$ $= \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) d\tau\, \vec{e_x}$

$= \eta \Delta v_x\, d\tau\, \vec{e_x}$

Pareil sur les 3D et généralisation pour écoulement incompressible newtonien.

$$\boxed{\vec{f_v} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \eta \vec{\Delta} \vec{v}}$$

laplacien : lien avec équation de diffusion. On va voir ça juste après. Et pour ça on commence par écrire l'équation du mouvement complète pour un fluide visq.

II. Dynamique des fluides visqueux

A) Equation de Navier-Stokes

On applique le PFD à une particule de fluide $d\tau$ de masse $\rho d\tau$ dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Les forces sont la pression, le poids et la viscosité. On utilise une approche eulérienne.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

hyp. fluide newtonien et incompressible.

C'est l'équation de Navier-Stokes. Elle est non-linéaire à cause du terme en $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$ ce qui la rend impossible à résoudre dans le cas général. La preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution est d'ailleurs l'un des problèmes du millénaire de l'institut Clay.

Dans des cas simples, on peut tout de même la résoudre ou en tirer des informations importantes. D'abord revenons sur l'idée d'équation de diffusion.

B) Diffusion de la quantité de mouvement

Pour un écoulement parallèle $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{0}$, sans gradient de pression ni gravité, l'équation du mouvement se réduit à

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \vec{\Delta} \vec{v} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \vec{\Delta} \vec{v} \quad \text{avec } \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

la viscosité dynamique. On a une équation de diffusion pour la vitesse ou la quantité de mouvement avec ν en m^2/s qui est le coefficient de diffusion.

Comme la chaleur dans un solide, la qté de mvmt diffuse de couche en couche. Le temps typique de diffusion sur une épaisseur δ est $\tau \sim \delta^2/\nu$

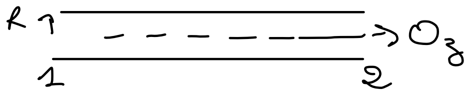
Retour sur les vidéos Couette avec 2 ν différents.

$1\ \text{cst} = 10^{-6}\ m^2/s$. Voyons maintenant un autre ex important

b) Ecoulement de Poiseuille

Conduite cylindrique horizontal de rayon R et de longueur L orienté selon Oz.

Différence de pression
$$\Delta P = P_1 - P_2 > 0$$



Ecoulement permanent, incompressible, $\cancel{\vec{g}}$, régime établi. Coord cylindriques

$$\vec{v}(r) = v_r(r)\vec{e}_r + v_z(r)\vec{e}_z$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow r v_r = \text{cste} \quad \text{or en } r=0 \ v_r \text{ finie}$$

donc $v_r = 0$

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \eta \vec{\Delta}\vec{v} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \rightarrow p(z)$$

$$\vec{\Delta}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{dv_z}{dr}\right)\vec{u}_z$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = C(\cancel{r}, \cancel{z})$$

$$p(z) = p_0 + Cz$$

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\Delta p}{L} = -C$$

$$v_z(r) = \frac{C}{4\eta} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$$

$v(0)$ finie donc $C_1 = 0$

$v_1(R) = 0 \qquad C_2 = \frac{-C}{4\eta} R^2$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$ profil parabolique

Vidéo Youtube

$$Q = \iint \vec{v} \cdot \vec{dS} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$$ $\longrightarrow$ mesure de η

$\vec{dS}$: $2\pi r dr$

$$\boxed{\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q}$$

C'est la loi de Poiseuille qui relit linéairement ΔP et Q. On peut faire une analogie avec la loi d'ohm $\Delta U = RI$ et on définit la résistance hydraulique $R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$.

La puissance R^4 est notable. Une toute petite réduction de rayon à ΔP cste $\Rightarrow$ forte baisse de Q : Artères bouchées.

On va vérifier expérimentalement cette loi

Vase de Mariotte assure débit constant et pression constante en sortie. Tant que le tube plongeur bulle la pression à la sortie est $P_{atm} - \rho g h$ où h est la distance entre le bout du tube et la sortie. Δp est alors constante et indépendante du niveau d'eau.

Deux tubes manométriques mesurent la pression locale. Le fluide dans ces tubes est au repos donc $P = P_{atm} + \rho g h$ et la différence de hauteur donne $\Delta P = \rho g \Delta h$.

En préparation on a fait plusieurs points pour plusieurs débits. On en fait un en direct. Mesure du temps pour un certain volume donne Q.

On trace $\Delta P = f(Q)$ et on vérifie le modèle. On peut aussi ici en tirer une estimation de η même si c'est rarement le but de Poiseuille. $\eta_{eau} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Pa.s.

Poiseuille | X(X)

Applications : Perfusions médicales, Tuyaux industriels, médecin circulation sanguine capillaire

On a résolu Navier-Stokes dans un cas simple mais dans la plupart des cas, $(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v} \neq \vec{0}$ strictement. On se demande quand est-ce qu'on peut simplifier NS en négligeant ce terme.

III - Nombre de Reynolds

A) Définition et signification physique

L'équation de Navier-Stokes contient deux termes "dynamiques" qui s'opposent : le terme convectif (non-lin) et le terme diffusif (viscosité). Le nombre de Reynolds compare ces deux termes en ordre de grandeur.

Soit U et L une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement

$$\|\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}\| \sim \rho \frac{U^2}{L} \qquad \|\eta \vec{\Delta} \vec{v}\| \sim \eta \frac{U}{L^2}$$

$$Re = \frac{\text{accélération convective}}{\text{diffusion visqueuse}} = \frac{\|\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta\vec{v}\|} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$$

On peut aussi interpréter ce Re en termes de temps caractéristiques

$$Re = \frac{\tau_{diffusion}}{\tau_{convectif}} = \frac{L^2/\nu}{L/U} = \frac{UL}{\nu}.$$

régime visqueux

- Si $Re \ll 1$: diffusion visqueuse rapide comparée au transport convectif. La viscosité domine. C'est le régime de Stokes dans lequel NS se linéarise.

régime inertiel

Si $Re \gg 1$: le transport convectif domine. Les effets visqueux sont confinés dans de fines couches près des parois appelées couches limites. Loin des parois on peut utiliser le modèle du fluide parfait.

Rq : En plus de visq / inertiel, le nombre de Re permet de distinguer les régimes laminaires et turbulents en fonction d'un Reynolds critique qui dépend de l'écoulement étudié. On ne rentrera pas dans les détails ici.
5.10^5 ou 2300.

Exemple de nbre de Reynolds :

$$\frac{1000\times 10^{-3}\times 5.10^{-6}}{3.10^{-3}}$$

$\|$

écoulement sanguin capillaires $Re \sim 10^{-3}$

miel coule $\longrightarrow$ expérience Poiseuille $Re \sim \frac{1000 \times U \times D}{10^{-3}} \sim 200$

$$\frac{1400\times 5.10^{-3}\times 5.10^{-3}}{10} \sim 3.10^{-3}$$

$D \sim 2.10^{-3}\,m \quad U \sim 0,1\,m/s$

ballon de foot $\dfrac{1{,}2\times 20.10^{-2}\times 10}{1{,}8.10^{-5}} \sim 10^{4} \gg 1$

voiture $\dfrac{1{,}2\times 3\times 30}{1{,}8.10^{-5}} \sim 6.10^{6} \gg 1.$

Re outil très puissant : sans dimension donc permet de comparer le comportement de deux écoulements même très différents → maquettes avion miniature dans eau.
principe de similitude.

Ce nombre de Reynolds va aussi être très utile pour quantifier la force exercée par un écoulement visqueux sur un objet qui s'y déplace (voiture, avion, balle...) en plus de frottements internes au fluide qu'on a vu avec la viscosité cinématique.

B) Forces de traînée et coefficient C_x

Lorsqu'un objet se déplace dans un fluide, le fluide exerce une force sur l'objet. La composante parallèle à l'écoulement est la traînée et la composante perpendiculaire est la portance.

On va raisonner par analyse dimensionnelle. On a F_T, D la taille carac, U la vitesse, η, ρ

$F_T : MLT^{-2}$ $D : L$ $U : L.T^{-1}$ $\rho : ML^{-3}$

$\eta : ML^{-1}T^{-1}$

3 dimensions 5 grandeurs $\xrightarrow{VB}$ 2 nombres sans dimension

$$\frac{F_T}{\rho D^2 U^2} = f(Re)$$

On définit le coefficient de traînée C_x tq

$$F_T = \frac{1}{2} C_x(Re)\rho S U^2$$ S section frontale

On projette la courbe $C_x(Re)$ pour une sphère

Deux régimes important :

$Re \ll 1$: $C_x = \frac{24}{Re} \rightarrow F_T = 6\pi\eta R U$ loi de Stokes
$\propto U$. goutte pluie. bille glycérol

$Re \gg 1$: $C_x \sim$ cste $\sim 0{,}45$ pour sphère lisse
$F_T \propto U^2$ indépendant de η.
Voiture, cycliste, ballon

Vers $Re \sim 2.10^5$ crise de la traînée à la transition vers la turbulence. (balle de golf, crise plus tôt si rugueux mais C_x après crise plus élevé).

Conclusion . Viscosité propriété de transport qui quantifie le transfert diffusif de qté de mvmt entre couches voisines.
. NS généralise Euler. Résolution possible que dans des cas académiques.
. Sinon, il faut simplifier en comparant les termes grâce à Re.

→ Ouverture : Re décrit des physique très différentes d'écoulements très turbulents et chaotiques à ceux à très bas Re qui sont réversibles ce qui mène à de la physique contre intuitive.
Vidéo réversibilité

Bibliographie : PC Dunod
Guyon, Hulin Hydrodynamique physique
BUP 769 Loi de Poiseuille, Darcy.

Questions : Interprétation microscopique

gaz $\eta = \frac{1}{3} \rho \ell v_{th}$

liquide $\eta \propto \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$