

## 2 - Lois de Conservation en Dynamique

M2

### Tube de pitot

Manipulations possibles : Chocs avec mobiles autoporteurs  
pendule simple avec étude énergétique  
Lois des aires avec des mobiles  
Talouret d'inertie en qualitatif  
pendule de Newton en qualitatif

Notes sur la manip :

Niveau : PC

prérequis PFD, THC, TEC, cinématique des fluides, moments d'inertie, force centrale

Introduction : Résoudre les équat<sup>o</sup> du mouvement nécessite intégrer PFD : Syst. d'EDP d'ordre 2 souvent insoluble analytiquement.

Dans de nombreuses situat<sup>o</sup>, certaines grandeurs physique restent constantes au cours du mlmt. On parle de loi de conservation. Ces grandeurs conservées contraignent les équations ce qui permet parfois de les résoudre.

Ces lois de conservation ne sont pas des coïncidences : chacune est liée à une symétrie fondamentale du système et on va détailler pour chaque loi de conservation qu'on va présenter dans cette leçon quelle Symétrie est à son origine.

On va voir ensemble quelques lois de conservation que vous connaissez déjà mais le but va être d'illustrer leur puissance sur des problèmes très variés pour montrer leur aspect universel.

## I - Conservation de la quantité de mouvement

### A - Théorème et conditions de conservation

Système de masse  $m$  constante dans un référentiel galiléen

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad \text{avec } \vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i \text{ la q.té totale}$$

Système isolé (aucune force) ou pseudo-isolé ( $\sum \vec{F} = \vec{0}$ )  
 $\Rightarrow \vec{p} = \text{cte}$  ex verre sort table

Rq: peut être vrai que dans une direction de l'espace  $\rightarrow$  une composante de  $\vec{p}$  conservée.

$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{cte}$  est une intégrale 1<sup>ère</sup> du mouvement!

Cette conservation est liée à l'homogénéité de l'espace: si les propriétés du système sont invariées par translation selon  $\vec{e}_a$  alors  $p_a$  conservée!

Illustrons qualitativement cette conservation avec le pendule de Newton. Le système (ensemble des billes) est pseudo isolé ( $\vec{P} + \vec{K}$ ) donc  $\vec{p}$  conservée. Une bille lâchée une bille repart, 2 billes lâchées deux billes repartent.

(D'ailleurs on pourrait se demander pourquoi pas 1 bille deux fois plus rapide? En fait il y a aussi conservation de l'énergie cinétique si le choc est élastique!)

Appliquons aussi cette conservation à un problème qui semble paradossal: comment se propulser dans le vide de l'espace, sans aucun support pour pousser?

## B) Application à la propulsion d'une fusée

Système {fusée + ergols} dans le référentiel de Copernic galiléen.

le système est isolé donc  $\vec{p}$  est conservée. On se place en 1D dans la direction de propulsion.

Espace homogène  
Entre  $t$  et  $t+dt$ , la fusée éjecte  $|dm|$  de gaz à  $v_{ej}$  depuis la fusée.

$$m(t)v(t) = (m(t) + dm)(v + dv) - dm(v - v_{ej})$$

On développe et on garde l'ordre 1

$m(t)$  = masse fusée + ergols non éjectés

$$0 = m dv + dm v_{ej}$$

$$\text{soit } \int_0^{v_{max}} dv = -v_{ej} \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$$

$$\Delta v = v_{ej} \ln \frac{m_0}{m_f}$$

Équation de Tsiolkovski

Pour augmenter  $\Delta v$ , deux leviers:

$v_{ej}$  plus grand ie meilleur moteur ou  $\frac{m_0}{m_f}$  plus grand donc plus de carburant par rapport à la charge  $\Rightarrow$  fusée multi-étages.

Preons un exemple concret: le transfert d'un satellite météo d'une orbite basse vers une orbite géostationnaire. Cela demande deux manœuvres avec une éjection très brève.

Il faut  $\Delta v \sim 3,9 \text{ km/s}$

$m_0 \sim 5200 \text{ kg}$

$v_{ej} \sim 4400 \text{ m/s}$

$$m_f = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta v}{v_{ej}}\right) \sim 2140 \text{ kg}$$

$\Rightarrow$  37% de propergol soit 60% de la masse totale  $\rightarrow$  tyrannie de l'équation des fusées!

Rq:  $E_m$  non conservée,  $E_m \uparrow$  grâce à énergie chimique  
 $E_m + U$  conservée.

\* Manœuvre de Hohmann

Conservation de  $\vec{p}$  liée à symétrie de translation de l'espace. Passons à une autre symétrie : toujours de translation mais dans le temps. Cette homogénéité du temps donne la conservation de l'énergie mécanique.

## II - Conservation de l'énergie mécanique.

### A) Théorème et conditions de conservation

$$\begin{aligned} \text{On part du TEC } dE_c &= \sum_i \delta W(\vec{F}_i) \\ &= \sum_i \delta W_{c_i} + \sum_j \delta W_{nc_j} \\ &= -dE_p + \sum_j \delta W_{nc_j} \end{aligned}$$

$$d(E_c + E_p) = \sum_j \delta W_{nc_j}$$

$$dE_m = \sum_j \delta W_{nc_j}$$

Rq: Si pas de forces non-conservatives  $E_m$  conservée!

Rq: Si frottements,  $E_m \searrow$ , dissipée sous forme de chaleur.  
Si système isolé  $E_m + U$  conservée.

Retour pendule de Newton: Pendant le choc,  $E_p = \text{cste}$   
donc  $E_m = \text{cste}$  revient à  $E_c = \text{cste}$ .

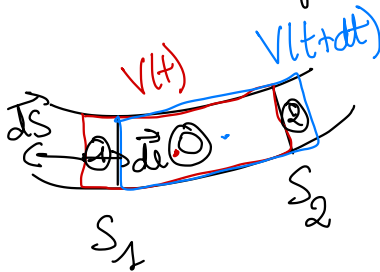
ça explique que c'est deux billes à  $v$  qui repartent et pas une bille à  $2v$ ! On aperçoit qu'il faut combiner les lois de conservation pour résoudre les problèmes.

Voyons une application de cette conservation dans le domaine de la méca des milieux continus: l'écoulement d'un fluide parfait.

## B) Application en mécanique des fluides : Théorème de Bernoulli et tube de Pitot

- Hypothèses :
- écoulement parfait  $\eta \rightarrow 0$  (forces conservatives)
  - écoulement stationnaire (homogénéité temporelle)
  - écoulement incompressible
  - seules forces : pesanteur et pression

On prend un tube de fluide c'est à dire un ensemble de lignes de courant formant une surface fermée



Incompressible

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = V(t) = V(t+dt)$$

$$\Rightarrow S_1 v_1 dt = S_2 v_2 dt = \delta V$$

stationnaire  $E_{m_0}(t) = E_{m_0}(t+dt)$

$$\Delta E_m = E_{m_2} - E_{m_1} = \mathcal{W}_{fnc} = \mathcal{W}_{pression}$$

$$E_2 + E_{p_2} - E_1 - E_{p_1} = \mathcal{W}_{pression}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho \delta V v_2^2 \quad E_{p_2} = \rho \delta V g z_2$$

Pour le travail des forces de pression  $\vec{F} = \iint -P d\vec{S}$

Sur les bords du tube  $d\vec{S} \cdot d\vec{l} = 0$  par déf tube de champ donc il ne reste que les bords

$$\rightarrow \mathcal{W}_{pression} = (P_1 - P_2) \delta V$$

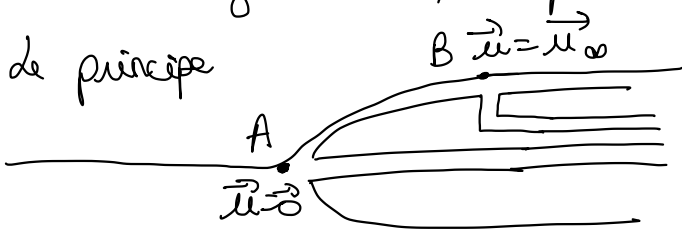
D'où en divisant par  $\rho V$  et en regroupant les termes

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{cte le long du tube de champ.}$$

C'est le théorème de Bernoulli qui montre que  $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P$  est une grandeur conservée analogue à une énergie mécanique volumique de la particule de fluide.

Ce théorème permet de comprendre le principe de fonctionnement des tubes de Pitot.

Ces tubes ont été inventés par Henri Pitot au XVIII<sup>e</sup> siècle pour mesurer la vitesse de la Seine et ils sont encore utilisés aujourd'hui, en particulier sur les avions.



en A  $v_A = 0$  point d'arrêt

Entre  $-\infty$  et A  $\frac{1}{2} \rho v_0^2 + P_0 = P_A$  ( $z_0 = z_A$ )

Point B  $v_B = v_0$   $P_B = P_0$  (en vrai CL mais pas de gradient de pression normal)

d'où  $\Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho v_0^2$  (donc pareil que au bord de la CL).

Manip. En préparation tracer

$\Delta P = f(v)$   
On cherche le  $\chi_{red}^2$  et  $\rho$  qui s'en peut composer à l'hois mais pas obligé.

Anémomètre à fil chaud: fil chauffé par Joule à puissance connue. Plus  $v \uparrow$ , refroidissement convectif  $\uparrow \rightarrow R$  diminue  
 $R$  est relié à  $v$ ,

Nanomètre: Transducteur piézoélectrique:  $\Delta l \rightarrow$  déformation  
 $\rightarrow$  signal élec

On a exploité deux symétries de translation: dans l'espace et dans le temps. On va regarder une 3<sup>e</sup> symétrie fondamentale: l'isotropie de l'espace qui va nous donner la conservation du moment cinétique.

### III - Conservation du moment cinétique

#### A) Théorème et conditions de conservation

En un point  $O$  fixe dans un référentiel galiléen

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_O^i \wedge \vec{F}_{ext,i}$$

Conservation de  $\vec{L}_O$  si

- ① Système isolé ou
- ② Résultante des moments nulle en  $O$

Cas particulier important: force centrale  $\vec{F} \parallel \vec{O}M$   
 $\Rightarrow \vec{r}_O^i \wedge \vec{F} = \vec{0}$

Conservation de  $\vec{L}$  liée à l'isotropie de l'espace. Si invariants par translation autour de  $Oz$ ,  $L_z = \text{cte.}$

Pq: Contraste important  $\vec{r}$  vs  $\vec{L}$ .  $\vec{r}$  ne dépend que de la

masse totale du système alors que  $\vec{L}$  dépend de la répartition géométrique des masses autour de l'axe d'intérêt. C'est ce qui rend les effets de moment cinétique spectaculaires : on peut changer  $\omega$  sans changer la masse juste en modifiant sa répartition.

### B) Illustration : tabouret d'inertie

Je me place sur le tabouret avec des haltères et je me lance en rotation avec les bras tendus.  
Je replis les bras  $\rightarrow$  accélération de la rotation.

Modélisons : Système { personne + masses + tabouret }

Axe de rotation vertical  $\vec{e}_z$ .

Hypothèses : liaison pivot parfaite (frottements négligés) et forces extérieures  $\parallel$  à  $\vec{e}_z$ .

$$M_z = 0 \rightarrow L_z \text{ conservé} \quad L_z = J\omega = \text{cte}$$

Bras tendus  $J_T$  grand (masses éloignées de l'axe)  
— repliés  $J_R$  petit ( — proches — )

$$\Rightarrow \omega_T < \omega_R \quad \checkmark$$

Applications concrètes : pirouette de la patineuse. Mais aussi en astrophysique : effondrement étoile à neutrons

R passe de  $10^6$  km à 10 km  $\rightarrow$  augmentation considérable de  $\omega \rightarrow$  origine des pulsars.

Justement, là avec le tabouret on a travaillé à l'échelle humaine mais on va passer à l'échelle astronomique et étudier le mouvement des planètes et retrouver certaines des lois de Kepler.

## C) Application : mouvement des planètes

On considère une planète de masse  $m$  en orbite autour du soleil de masse  $M$  considéré fixe. On se place dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen.

$$\vec{F} = -\frac{G m M}{r^2} \vec{e}_r \quad \parallel \vec{e}_r \quad \text{force centrale}$$

$$\text{donc } \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = m \vec{r} \wedge \vec{v} = \text{cte}$$

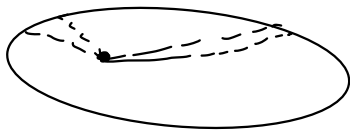
Conséquence 1 :  $\vec{L}_O$  constant définit un plan  $\perp$ .  
 $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  sont dans ce plan

→ Mouvement plan C'est un bout de la 1<sup>ère</sup> loi de Kepler.  
qui dit aussi que ellipse ont 2 foyers.

$$\begin{aligned} \text{Conséquence 2 : } \vec{L}_O &= m r \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge (r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \vec{e}_r) \\ &= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte des aires}$$

aire balayée pendant  $dt =$



$$dA = \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge d\vec{r}\|$$

$$= \frac{1}{2} \| r \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge (r d\theta \vec{e}_\theta + dr \vec{e}_r) \|$$

$$= \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cte}$$

C'est la 2<sup>e</sup> loi de Kepler : les aires balayées en temps égaux sont égales.

On a maintenant 3 lois de conservation à notre disposition

Montrons que leur combinaison peut être encore plus puissante que chacune prise isolément. On reprend Kepler et on va utiliser simultanément la conservation de  $\vec{L}$  et la conservation de  $E_m$ .

### D) Combiner $\vec{L}$ et $E_m$ - énergie potentielle effective

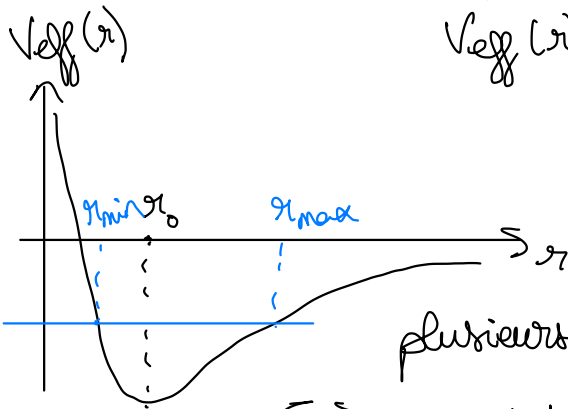
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \epsilon_p \quad \text{avec } \epsilon_p = -\frac{GmM}{r} \quad \text{donc conservative.} \\ \Rightarrow E_m = \text{cste.}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m r_1^2 \dot{\theta}^2 - \frac{GmM}{r_1}$$

$$L = m C = \text{cste} = m r_1^2 \dot{\theta}$$

$$d'où \dot{\theta} = \frac{L}{m r_1^2}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}_1^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2m r_1^2} - \frac{GmM}{r_1}}_{V_{\text{eff}}(r_1)}$$



$E_m > 0$  : état de diffusion  $\rightarrow$  hyperbole

$E_m < 0$  : état lié  $\begin{matrix} \text{P} & & \text{A} \\ \text{soit elliptique} & r_{\min} & r_{\max} \\ \text{soit circulaire} & r_0 & \end{matrix}$

Prends en peu de recul. En combinant 2 lois de

conservation, on a pu caractériser qualitativement toutes les trajectoires possibles du problème de Kepler. Pour obtenir l'équation exacte\*, on pourrait considérer un invariant supplémentaire le vecteur de Runge Lenz lié à une symétrie spécifique au potentiel en  $\frac{1}{r}$ .

\*91(9)

Conclusion On a vu au cours 3 grandes lois de

conservation en dynamique et montré leur utilité dans des problèmes très variés.

Chacune de ces lois est liée à une symétrie fondamentale

Symétrie du syst.	Invariance	Grandeur cons.
Espace homogène	Translation spatiale	$\vec{p}$
Indépendant de $t$	Translation temporelle	$E$
Espace isotrope	Rotation Spatiale	$\vec{L}$

Le cas ici des cas particuliers du théorème de Noether de 1918 : à toute symétrie continue d'un système correspond une quantité conservée.

Le théorème structure toute la physique, y compris au-delà de la mécanique. Par exemple en électromagnétisme l'invariance de jauge dans les équations de Maxwell donne la conservation de la charge électrique.

Ouverture : Relativité Compton. Conservation de  $E$  et  $\vec{p}$

Nobel 1927

photon diffuse sur  $e^-$  au repos  $\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$

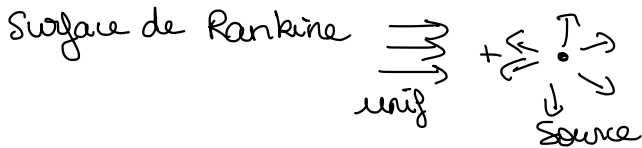
Sans rien connaître au mécanisme microscopique de l'interaction photon-électron.

Runge Lenz en quantique: dégénérescence énergie  $l$ .

Questions - Vitesse de satellisation  $\sqrt{gR_T} \sim 7,9$  km/s

Réduction problème à 2 corps: soustraction des 2 PFD donne  $\mu \vec{r} = \vec{F}$ . Syst global isolé  
 $\vec{r}_a = \vec{r}_0 + \vec{v}_a t$  avec  $\vec{v}_a = a t e$ .  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  permettent de remonter à  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$ .

N corps: Pas analytique.



TNC:  $O$  fixe ou  $G$  ou point de même vitesse que  $G$ .

$$J = \underbrace{\frac{1}{2} N R^2}_{\text{cylindre}} + 2 \times \underbrace{\frac{1}{3} m_b R^2}_{\text{masse}}$$

Biblio: Feyn Mécanique  
 BFR Méca 1 et 2  
 Durod tout en un PC

Bur 751  
 Kepler Harmonique